

Modellierung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos

Sven Reinstädler

**Institut für Statik
Technische Universität Braunschweig
Bericht Nr. 2016-119**



Modellbildung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos

von der
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktoringenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von
Sven Reinstädler
geboren am 14.09.1980
aus Paderborn

Eingereicht am: 10. Juni 2015
Disputation am: 25. September 2015

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler
Prof. Dr.-Ing. Thomas Sonar

2015

„Im Sinne des zureichenden Grundes finden wir, dass keine Tatsache [fait] als wahr oder existierend gelten kann und keine Aussage [Enonciation] als richtig, ohne dass es einen zureichenden Grund [raison suffisante] dafür gibt, dass es so und nicht anders ist, obwohl uns diese Gründe meistens nicht bekannt sein mögen.“

Gottfried Wilhelm Leibniz
Monadologie, § 32

zitiert nach der Suhrkamp-Ausgabe 1998, S. 27

Inhaltsverzeichnis

Mathematische Nomenklatur	1
Symbolverzeichnis	2
Kurzfassung	7
1 Motivation	9
2 Modellbildung	13
2.1 Betrachtungsweisen	14
2.2 Modellgleichungen in lokaler Form	18
2.2.1 Struktur	18
2.2.2 Fluid	25
2.2.3 Kopplungen	32
3 Diskretisierung der Modellgleichungen	37
3.1 Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode	37
3.1.1 Zeitintegration	38
3.2 Modellgleichungen in globaler Form	45
3.2.1 Struktur	45
3.2.1.1 Arbeitsgleichung	46
3.2.1.2 Ansätze	50
3.2.1.3 Elementeigenschaften	56
3.2.1.4 Konvergenzverhalten	63
3.2.2 Fluid	69
3.2.2.1 Arbeitsgleichung	69
3.2.2.2 Ansätze	74
3.2.2.3 Netzbewegung	78
3.2.2.4 Linearisierung	80
3.2.3 Kopplungen	84
4 Angereicherte Elemente	89
4.1 Anreicherungen	90
4.2 Numerische Integration	93
5 Bewegungen freier Oberflächen	101
5.1 Level-Set-Methode	101
5.2 Reinitialisierung	106

6	Lösungsverfahren	111
6.1	Simultane Lösung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen	111
6.2	Gestaffelte Lösung von Mehrfeldsystemen mit freien Oberflächen . . .	115
6.2.1	Zwei-Fluid-Strömungen	115
6.2.2	Ein-Fluid-Strömungen	122
7	Validierung und Verifikation	127
7.1	Strukturmechanik	127
7.2	Fluidmechanik	131
7.3	Fluid-Struktur-Wechselwirkung	139
8	Numerische Analyse von Silos	151
8.1	Modellbildung	151
8.1.1	Siloschalen	151
8.1.2	Schüttgüter	152
8.2	Verformungsverhalten dünnwandiger Siloschalen	157
8.2.1	Zentrische Entleerungen	157
8.2.2	Exzentrische Entleerungen	159
8.3	Beanspruchungen von Siloschalen	162
8.3.1	Ruhende Schüttgüter	163
8.3.2	Strömende Schüttgüter	168
9	Zusammenfassung und Ausblick	185
	Anhang	186
A	Auswertung von Arbeitsgleichungen	189
A.1	Transformationsmatrizen partieller Ableitungen	190
A.2	Integrationsformeln	191
A.2.1	Tetraeder	191
A.2.2	Pentatop	196
	Literaturverzeichnis	199

Mathematische Nomenklatur

Tensoren		Komponente - Basis	Matrizen	Element
x	Tensor nullter Stufe		x	Skalar
\mathbf{x}	Tensor erster Stufe	$x_i \quad \mathbf{e}^i$	\mathbf{x}	Vektor x_i
\mathbf{X}	Tensor zweiter Stufe	$X_{ij} \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$	\mathbf{X}	Matrix X_{ij}
\mathbb{X}	Tensor vierter Stufe	$\mathbb{X}_{ijkl} \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l$		

Operatoren

$\nabla()$	Gradient	
$\nabla \cdot ()$	Divergenz	
$\nabla^2()$	Laplace-Operator	$\nabla^2() = \nabla \cdot (\nabla())$
$() \cdot ()$	Skalarprodukt	
$() : ()$	zweistufige Tensorverjüngung	
$() \otimes ()$	Dyadisches Produkt	
$\text{tr}()$	Spur	
$\det()$	Determinante	
$()^{-1}$	Inverse	
$()^T$	Transponierte	
$\text{sym}()$	symmetrischer Anteil	$\text{sym}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{X} + \mathbf{X}^T)$
$\ \ $	L2-Norm	
$ $	Absolutwert	
$\text{sgn}()$	Signumfunktion	
$\frac{d()}{dt}, ()^\cdot$	materielle Zeitableitung	
$\frac{\partial()}{\partial t}, ()_{,t}$	partielle Zeitableitung	
$\langle \rangle$	Macauley-Klammer	
$\delta()$	Variation	
$\Delta()$	differentielles Inkrement	
$\ln()$	natürlicher Logarithmus	
$I_1()$	erste Invariante	$I_1(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X})$
$I_2()$	zweite Invariante	$I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_{ij} : \mathbf{X}_{ji} - \mathbf{X}_{ii} \mathbf{X}_{jj})$
$I_3()$	dritte Invariante	$I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X})$
$()^d$	deviatorischer Anteil	$\mathbf{X}^d = \mathbf{X} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{X})$

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

A	Fläche
Ab	Anfangsbedingung
b	Modellparameter - Verfestigung
c	Kohäsion
d	Dämpfungskoeffizient - Viskoplastizität
d_0	Dämpfungskoeffizient - Rayleigh-Dämpfung
e	Exzentrizität
E	Elastizitätsmodul
F	Kraft
G	Schubmodul
h	equivalente Elementlänge
H	Heaviside-Funktion
k	Federsteifigkeit
K	Kompressionsmodul
K	Horizontallastverhältnis
m	Masse
M	Anreicherungsfunktion
N	Ansatzfunktion
p	Druck
p	Last
P	Raum-Zeit-Rand
q	Sättigungswert - Verfestigung
Q	Raum-Zeit-Gebiet
R	Knickfunktion
Rb	Randbedingung
t	Zeit
t_s	Schalendicke
U	Umfang
V	Volumen
w	Wichtung

Griechische Buchstaben

α	Modellparameter - Reibspannung
α_v	Dilatanz - Fließbedingung
α_Ψ	Dilatanz - Fließrichtung
β	Modellparameter - Viskoplastizität
$\dot{\gamma}$	Vergleichsdehnrate
ϵ	Regularisierungsparameter
ε_V	volumetrische Verzerrung
ϵ_{tol}	Heuristikparameter
θ	Winkel in Umfangsrichtung
κ	Stabilisierungsparameter
λ_L	erste Lamé-Konstante
$\dot{\lambda}$	viskoplastische Vergleichsdehnrate
μ	Reibungskoeffizient
μ_L	zweite Lamé-Konstante
μ_{ef}	effektive dynamische Viskosität
ν	Querdehnzahl
ξ	lokale Raumkoordinate
ρ	Dichte
$\tilde{\rho}$	extrapolierte Dichte
ϱ	Spektralradius
σ_{ex}	Überspannung
σ_y	Fließspannung
σ_v	Vergleichsspannung - Struktur
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
τ	lokale Zeitkoordinate
τ_{eq}	Vergleichsspannung - Fluid
τ_y	Fließspannung
ϕ	Abstandsfunktion
ϕ_i	innerer Reibwinkel
ϕ_w	Wandreibungswinkel
χ	isotrope Verfestigung
Ψ	Potential
$\Delta\varphi$	Phasenverschiebung
ψ	Dilatanzwinkel
ψ_c	Winkel Fließkanal Silowand
Ω	räumliches Gebiet

Tensoren erster Stufe

\mathbf{d}	Verschiebung - Beobachter
\mathbf{g}	Erdbeschleunigung
\mathbf{l}	Fließrichtung
\mathbf{n}	Normalenrichtung
\mathbf{t}	Randspannung
\mathbf{u}	Verschiebung - materieller Punkt
\mathbf{v}	Geschwindigkeit - materieller Punkt
$\tilde{\mathbf{v}}$	extrapolierte Geschwindigkeit - materieller Punkt
\mathbf{v}	Geschwindigkeit - Beobachter
$\Delta \mathbf{v}$	Differenzgeschwindigkeit (materieller Punkt - Beobachter)
\mathbf{x}	Position - materieller Punkt
\mathbf{x}	Position - Beobachter
$\tilde{\mathbf{x}}$	Raumkoordinate

Tensoren zweiter Stufe

$\boldsymbol{\alpha}$	Spannungstensor - kinematische Verfestigung
\mathbf{C}	rechter Cauchy-Green-Tensor
$\boldsymbol{\delta}$	Kronecker-Delta
\mathbf{D}	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
\mathbf{E}	Greenscher Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Cauchy Verzerrungstensor
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{I}	Identität
$\boldsymbol{\kappa}$	Stabilisierungstensor
\mathbf{P}	erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
\mathbf{S}	zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy Spannungstensor
$\boldsymbol{\tau}$	Cauchy Spannungstensor - deviatorischer Anteil

Tensoren vierter Stufe

\mathbb{C}	Elastizität
\mathbb{F}	Flexibilität

Vektoren

- $\hat{\mathbf{d}}$ Verschiebungen - Beobachter
- $\hat{\mathbf{p}}$ Drucke
- \mathbf{r} Residuen
- $\hat{\mathbf{s}}$ Spannungen
- $\hat{\mathbf{u}}$ Verschiebungen - materieller Punkt
- $\hat{\mathbf{v}}$ Geschwindigkeiten
- $\hat{\mathbf{z}}$ Unbekannte

Matrizen

- \mathbf{K} Systemmatrix
- \mathbf{U} Übertragungsmatrix

Kurzfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist ein Modell für die numerische Analyse von Verformungs- und Spannungszuständen während der Entleerung von Behältern und Silos, die mit Flüssigkeiten beziehungsweise Schüttgütern befüllt sind.

Das Verformungsverhalten dünnwandiger Siloschalen aus Stahl ist mit einem kontinuumsmechanischen Modell für große Rotationen und elastisch-viskoplastischem Materialverhalten beschrieben, das die Verfestigung von metallischen Werkstoffen bei zyklischer Beanspruchung abbildet. Das mechanische Verhalten von Flüssigkeiten und Schüttgütern ist mit den Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Fluide modelliert, um Verdichtungs- und Auflockerungszonen berücksichtigen zu können. Für moderate Bewegungen ist das mechanische Verhalten von Schüttgütern alternativ mit einem Strukturmodell für elastisch-viskoplastische Materialien und Fließkriterium nach Drucker-Prager beschrieben. Der Phasenübergang zwischen ruhendem und strömendem Schüttgut ist mit einem Modell für viskoplastische Fluide nach Bingham formuliert. Die Beschreibung der freien Oberfläche von Flüssigkeiten und Schüttgütern erfolgt mit der Level-Set-Methode. Mit Berücksichtigung der Wandreibung zwischen Schüttgut und Siloschale liegt ein Gesamtmodell vor, mit dem das Zusammenwirken der Verformung von Siloschalen mit dem Strömungszustand von Schüttgütern numerisch untersucht werden kann.

Die Modellgleichungen sind mit dem Prinzip der virtuellen Leistung in schwacher Form angegeben. Die Diskretisierung erfolgt mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode mit drei Raumdimensionen und einer Zeitdimension. Die Approximation der Geschwindigkeiten als primäre Beschreibungsvariablen erfolgt mit Polynomansätzen in Raum und Zeit. Die zeitliche Entwicklung der Zustandsgrößen ist mit linearen Ansätzen beschrieben und mit dem zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren in Schritten berechnet. Die Modellgleichungen für das Verformungsverhalten der Struktur sind mit Geschwindigkeiten und Spannungen als Beschreibungsvariablen formuliert und mit gemischt-hybriden Elementen diskretisiert. Die Diskretisierung erfolgt mit isoparametrischen Elementen mit quadratischer Approximation und abgestimmten Ansätzen für die Spannungen im Raum. Die Mechanik von Fluiden ist mit Elementen angenähert, deren Lösungsverhalten mit Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Stabilisierungen verbessert ist. Die schwache Form der Übergangsbedingungen zwischen Fluid und Struktur ist mit flächigen Elementen diskretisiert. Mit einer Pseudo-Struktur ist das Gebiet des Fluids an die Verformung der nachgiebigen Struktur entlang des gemeinsamen Randes angepasst. Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems für die Untersuchung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen erfolgt mit dem Newton-Raphson-Verfahren.

Die *fragmented finite element method* (*FFEM*) wird für die Bewegung von Fluiden eingesetzt, die nur in einem Teil des gesamten Raum-Zeit-Gebietes präsent sind. Hierbei wird das Gesamtgebiet von aktiven und passiven Elementen bedeckt, wobei die Fluide mit den aktiven Elementen beschrieben werden. Die Auswertung der Elemente mit freier Oberfläche erfordert Integrationsformeln, die mit einem Algorithmus für die Parkettierung von Teilgebieten vierdimensionaler Elemente in Abhängigkeit der Lage der freien Oberfläche bestimmt sind. Die Konvergenz der Näherungslösung für die Bewegung der freien Oberfläche wird mit einer Extrapolation des Geschwindigkeitsfeldes verbessert. Die gleiche Methodik wird auch für die Extrapolation des Dichtefeldes kompressibler Fluide eingesetzt, um in neu aktivierten Elementen gültige Startwerte für die Lösung der diskretisierten Modellgleichungen zu erhalten. Die *FFEM* ist aus der *extended finite element method* abgeleitet, die zuvor mit ihren speziellen Ansätzen für die Abbildung von diskontinuierlichen Verläufen dargestellt ist.

Die Validierung des entwickelten Finite-Elemente-Programms erfolgt mit ausgewählten Modellen der Struktur- und Fluidmechanik sowie der Fluid-Struktur-Wechselwirkung. Die Beanspruchung und das Verformungsverhalten von dünnwandigen Siloschalen ist für ruhende und strömende Schüttgüter untersucht. Die Entwicklung der freien Oberfläche von Flüssigkeiten und Schüttgütern wird während zentrischer und exzentrischer Entleerungen analysiert. Der damit einhergehende zeitveränderliche Spannungszustand in Behältern und Silos wird für steile und flache Auslauftrichter sowie glatte und raue Wände verglichen.

1 Motivation

Der Entwurf einer Siloanlage für die Lagerung von Schüttgütern ist eine interdisziplinäre Aufgabe der Verfahrenstechnik und Tragwerksplanung. Aus Sicht der Verfahrenstechnik sind kurze Umtriebszeiten sicher zu stellen. Dies ist insbesondere bei der Zwischenlagerung verderblicher Schüttgüter zu beachten und gewährleistet, wenn das Schüttgut gleichförmig mit einem Massefluss aus dem Silo abgezogen werden kann. Ob sich das gesamte Schüttgut bei einem Austrag mit Massefluss in Bewegung setzt, ist im Wesentlichen von der Höhe des Auslauftrichters abhängig. In Abbildung 1.1 sind zwei Siloanlagen dargestellt, die sich aus einer Aneinanderreihung von Rundsilos zusammensetzen.



(a) Anlage 1



(b) Anlage 2

Abbildung 1.1: Siloanlagen [73]

Die Rundsilos der Anlage 1 zeichnen sich durch einen hohen Auslauftrichter aus und eignen sich daher für die Lagerung von Schüttgütern mit einem erhöhten inneren Reibungswinkel. Einen solchen Reibungswinkel weisen insbesondere pulverförmige Schüttgüter auf, die in der Chemie- und Lebensmittelindustrie verarbeitet werden. Ist der innerer Reibungswinkel klein, kann die Höhe des Auslauftrichters reduziert und mit der Anlage 2 mehr Raum für die Lagerung des Schüttgutes bereitgestellt werden.

Mit einer Reduzierung der Höhe des Auslauftrichters ist jedoch die Möglichkeit der Anlagerung konsolidierten Schüttgutes innerhalb toter Zonen mit einhergehender Schachtbildung gegeben. In diesem Fall wird nur ein Teil des gelagerten Schüttgutes innerhalb eines Kernflusses abgezogen (siehe Abbildung 1.2a). Ist der Auslauftrichter zentrisch angeordnet, kann der Tragwerksplaner die rotationssymmetrischen Einwirkungen während zentrischer Entleerungen mit dem von JANSSEN [36] formulierten

Lastmodell bestimmen (vergleiche Eurocode 1 Teil 4 : Einwirkungen auf Silos und Flüssigkeitsbehälter [17]). Wird das Schüttgut im Grundriss exzentrisch aus dem Silo abgezogen, wird die Siloschale nicht mehr rotationssymmetrisch beansprucht. Eine exzentrische Entleerung wird durch einen Verzug des Auslauftrichters begünstigt, der bei stark kohäsiven Schüttgütern zu einer Schachtbildung führen kann, so dass auch in diesem Fall nur ein Teil des Schüttgutes abgezogen werden kann. Kann das konsolidierte Schüttgut mit pneumatischen Austragshilfen nicht aufgelockert und verflüssigt werden, ist es mit mechanischen Einrichtungen aufwändig abzutragen. Die in Abbildung 1.2b dargestellte exzentrische Entleerung über einen einseitig ausgebildeten Schacht führt im Übergangsbereich zwischen strömendem und ruhendem Schüttgut zu einer erhöhten Beanspruchung der Siloschale.

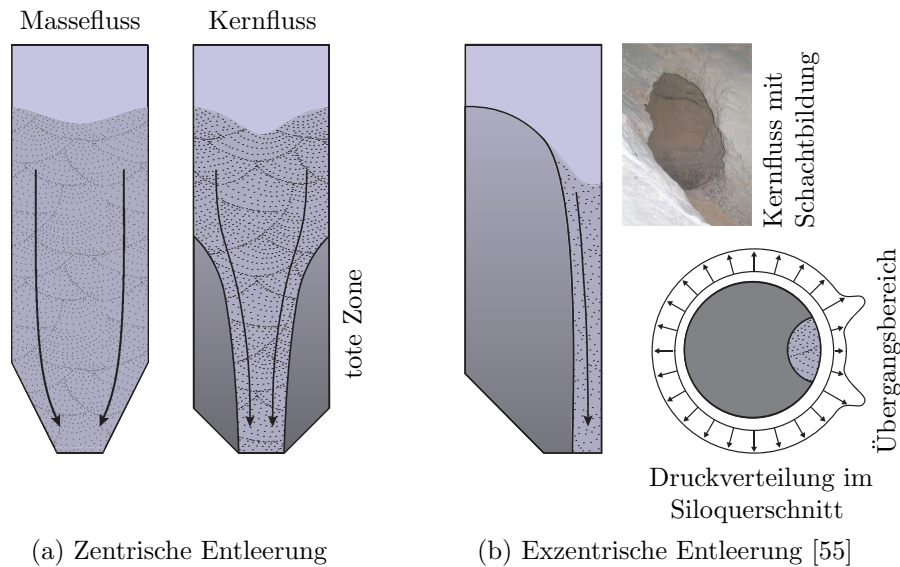


Abbildung 1.2: Entleerungen von Silos

Ist die Dicke der Siloschale nur für rotationssymmetrische Lasten bemessen, kann die erhöhte Beanspruchung bei dünnwandigen Siloschalen zu einem Verlust an Stabilität führen, der mit der Ausbildung von Beulen einhergeht. Mögliche Beulformen sind mit Schadensfällen in Abbildung 1.3 dargestellt. Die Verformung und die über die Höhe des Silos einseitige Anordnung der Beulen des Schadensfalls 1 nach Abbildung 1.3a deutet auf eine lokal erhöhte Beanspruchung und eine exzentrische Entleerung mit einem Fließkanal hin. Überschreitet der mit der Ausbildung von Beulen verbundene Verlust an Steifigkeit der Siloschale einen kritischen Wert, ist die Gebrauchstauglichkeit eines Silos nicht mehr gewährleistet und dessen Tragfähigkeit gefährdet (siehe Abbildung 1.3b).

Die erhöhte Beanspruchung im Übergangsbereich ist nach Eurocode 1 Teil 4 [17] mit dem Lastmodell nach ROTTER [53] zu berechnen. Nach dem von Rotter vorgeschlagenem Lastmodell ist die Höhe der Beanspruchung im Übergangsbereich unter anderem mit der Horizontallast in einem den Abmessungen des Fließkanals äquivalenten Silo bestimmt. Dabei ist der Bereich, in dem die erhöhte Beanspruchung anzuset-

zen ist, allein mit der Geometrie des Fließkanals festgelegt, so dass die Anforderung an das Gleichgewicht der Kräfte nicht erfüllt ist. Weiterhin ist die Nachgiebigkeit von Siloschalen nicht berücksichtigt, so dass das Modell auf dessen Anwendbarkeit für die Ermittlung repräsentativer Lasten auf dünnwandige Siloschalen aus Stahl zu hinterfragen ist.



(a) Schadensfall 1



(b) Schadensfall 2

Abbildung 1.3: Schadensbilder [74],[12]

Zielsetzung

Mit einem mathematischen Modell für das Trag- und Verformungsverhalten von dünnwandigen Silos kann unter anderem der Einfluss verdrängender Einbauten auf das Strömungsfeld von Schüttgütern während der Entleerung numerisch analysiert werden. Es können Spannungszustände untersucht werden, die in Schüttgütern zu einer Ausbildung von Fließkanälen führen, und für die Verfahrenstechnik Empfehlungen für die Ausgestaltung von Silos abgeleitet werden. Mit der Interaktionsspannung zwischen dem Schüttgut und der umschließenden Siloschale können Lastansätze entwickelt werden, mit denen der Tragwerksplaner die Standsicherheit eines Silos für nicht rotationssymmetrische Entleerungen nachweisen kann.

Modellierung

Die Entwicklung eines kontinuumsmechanischen Modells für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern ist mit der Verfolgung ihrer freien Oberfläche und Identifikation von Fließkanälen motiviert. Gegenüber der Simulation einer Entleerung mit Methoden der Partikeltechnik kann mit einem kontinuumsmechanischen Modell die Ausbildung von Fließkanälen unabhängig von der Lage einzelner Partikel numerisch analysiert werden. Des Weiteren kann das mechanische Verhalten feinpulveriger Schüttgüter untersucht werden, wenn geeignete Materialmodelle bereitgestellt sind. So ist mit der Kontinuumsmechanik der Übergang vom

grobkörnigen zum feinpulverigen Schüttgut möglich, bei dem das mechanische Verhalten eines einzelnen materiellen Punktes vom Zustand der umgebenden materiellen Punkte beeinflusst ist.

Die kontinuumsmechanische und ratenabhängige Modellierung des Verformungsverhaltens von Siloschalen als dünnwandige, räumliche Strukturen ermöglicht eine starke Kopplung an das Geschwindigkeitsfeld von Schüttgütern. Im Vergleich zu einer Modellierung der Schale als gekrümmtes Flächentragwerk müssen keine Annahmen für die Kinematik senkrecht zu ihrer gekrümmten Ebene getroffen werden.

Diskretisierung

Die Diskretisierung der Modellgleichungen erfolgt mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode. Grundlage ist das Prinzip der virtuellen Leistung nach Jourdain und die Beschreibung der Zustandsgrößen im Raum und in der Zeit mit Polynomansätzen. Mit der gleichartigen Approximation der Zustandsgrößen in Raum und Zeit können Phänomene abgebildet werden, bei denen die zeitliche Entwicklung der Zustandsgrößen schneller voranschreitet als ihre räumliche Ausbreitung.

Die Verwendung des Prinzips der virtuellen Leistung setzt eine gemischte Formulierung der Modellgleichungen der Strukturmechanik voraus. Neben der Impulserhaltung bedingt die Verwendung von Verzerrungsgeschwindigkeiten eine Ratenformulierung der konstitutiven Beziehungen. So ist neben dem Geschwindigkeitsfeld der Spannungszustand mit einem separaten Ansatz approximiert. Mit der Definition speziell abgestimmter Ansätze können gemischt-hybride Elemente entwickelt werden, mit denen die Steifigkeit dünnwandiger Schalen gut abgebildet werden kann.

Die einheitliche Formulierung der Kinematik von Strukturen und Fluiden mit Geschwindigkeiten als primäre Beschreibungsgrößen vermeidet zusätzliche Übergangsbedingungen für eine simultane Lösung des Gleichungssystems von Modellen mit oberflächengekoppelten Gebieten. Weiterhin ist mit der *Arbitrary Lagrange-Eulerian*-Formulierung (*ALE*-Formulierung) der Modellgleichungen die Adaptation des Fluidgebietes an deformierbare Berandungen gegeben. Ein weiterer Vorteil der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung liegt in der Beschreibung der Bewegung freier Oberflächen, deren Lage in Raum und Zeit kontinuierlich verfolgt werden soll.

2 Modellbildung

Die Beschreibung der Bewegung von Strukturen und Fluiden erfolgt mit mathematischen Modellen der Kontinuumsmechanik. In der Kontinuumsmechanik ist die Gesamtheit der materiellen Punkte als materieller Körper betrachtet. Die Beanspruchung eines materiellen Punktes wird mit der Bewegung benachbarter Punkte bestimmt. Dies führt auf die Annahme eines kontinuierlichen Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} . Dieses Geschwindigkeitsfeld unterstellt, dass sich die materiellen Punkte stets in Relation zueinander bewegen, so dass sich der materielle Körper nicht in unabhängige Gebiete auflösen kann.

Die Erhaltungsgleichungen für die Energie, den Impuls, den Drehimpuls und die Masse bilden die Grundlage der Kontinuumsmechanik. Die Energieerhaltung ist im Folgenden nicht berücksichtigt und damit das Gebiet des materiellen Körpers als energetisch offen betrachtet. Mit der Impulserhaltung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} d\Gamma \quad (2.1)$$

wird in der Kontinuumsmechanik die Veränderung der Impulsdichte $\rho \mathbf{v}$ infolge der Oberflächenspannung \mathbf{t} und der Wichte $\rho \mathbf{g}$ über das gesamte Gebiet Ω und dessen Rand Γ betrachtet. Die Wichte, die mit der Dichte ρ und Gravitation \mathbf{g} formuliert ist, stellt den Quellterm in Gleichung (2.1) dar. Der Vektor der Oberflächenspannung beschreibt hingegen den Fluss über den Rand des Gebietes infolge des zweistufigen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$, der die Beanspruchung im Inneren des materiellen Körpers beschreibt. Der Zusammenhang zwischen den Spannungstensoren ist mit dem Fundamentaltheorem nach Cauchy gegeben (vergleiche BONET [7]).

Das Fundamentaltheorem nach Cauchy ist mit $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ in Abhängigkeit des Normalenvektors \mathbf{n} bezüglich einer beliebigen Schnittfläche innerhalb des materiellen Körpers definiert, infolgedessen das Randintegral mit Anwendung des Integralsatzes nach Gauß in

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.2)$$

umgeformt ist. Der Spannungszustand ist mit konstitutiven Gleichungen und den Differentialgleichungen der Kinematik als weitere Modellgleichungen in Abhängigkeit der Bewegung der materiellen Punkte dargestellt. Mit drei Verschiebungsfreiheitsgraden bewegen sich die materiellen Punkte innerhalb eines Boltzmann-Kontinuums, dessen Drehimpulserhaltung mit der Symmetrie des Spannungstensors erfüllt ist.

Die Aufnahme der Masseerhaltung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

in den Satz der Modellgleichungen ist von der Wahl der Betrachtungsweise abhängig, aus der der materielle Körper beobachtet wird. Es wird zwischen der Betrachtungsweise nach Lagrange und Euler unterschieden. Beide Betrachtungsweisen werden zunächst getrennt voneinander dargestellt. Anschließend wird die *ALE*-Formulierung der Modellgleichungen diskutiert und deren Fundamentalgleichung hergeleitet, die beide Betrachtungsweisen vereint.

2.1 Betrachtungsweisen

Lagrangesche Betrachtungsweise

In der Lagrangeschen Betrachtungsweise bewegt sich der Beobachter mit dem materiellen Körper \mathcal{B} . Das Gebiet des Beobachters wird mit der Referenzkonfiguration beschrieben, die mit ψ_L den materiellen Körper abbildet (siehe Abbildung 2.1).

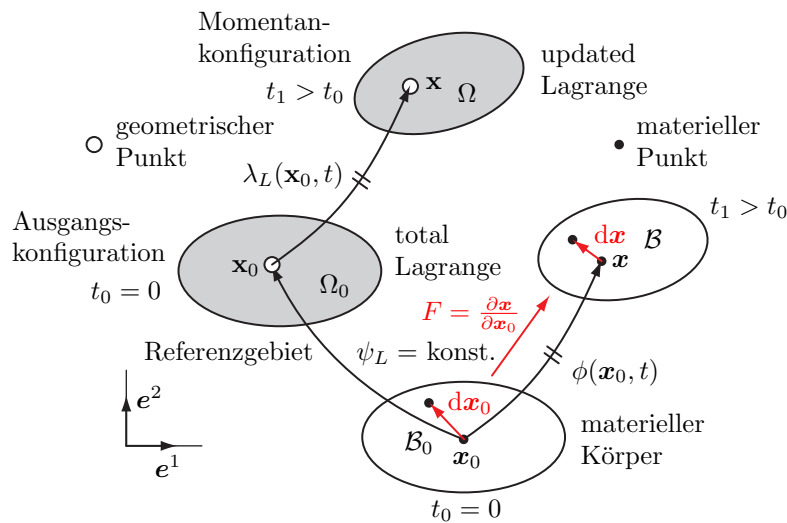


Abbildung 2.1: Lagrangesche Betrachtungsweise

Mit λ_L ist die Ausgangskonfiguration des Beobachters, die im Folgenden mit 0 indiziert ist, auf dessen Momentenankonfiguration zum Zeitpunkt $t_1 > t_0$ abgebildet. Sie ist bei $\psi_L = \text{konstant}$ der Abbildung ϕ zwischen den Konfigurationen des materiellen Körper identisch. Befindet sich der Beobachter auf der Momentenankonfiguration, werden die Modellgleichungen mit der *updated* Lagrangeschen Betrachtungsweise formuliert. Verfolgt der Beobachter hingegen die Bewegung des materiellen Körpers aus seiner ortsfesten Ausgangskonfiguration, sind die Modellgleichungen *total* Lagrange beschrieben.

Verändert sich auch lokal die Dichte der materiellen Punkte, wenn diese verzerrt sind, so ist die Masse des materiellen Körpers mit dessen Verfolgung im Zeitbereich erhalten und Gleichung (2.3) erfüllt. Aus der Lagrangeschen Betrachtungsweise ist im Folgenden das Verformungsverhalten der nachgiebigen Struktur beschrieben, deren Beanspruchung von der Lage der materiellen Punkte in ihrer Ausgangskonfiguration beeinflusst wird.

Die Modellgleichungen der Kontinuumsmechanik sind im Orthonormalsystem formuliert, so dass die Position eines materiellen Punktes mit den Komponenten des Vektors \mathbf{x} beschrieben ist. Sie sind alternativ mit $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$ bezeichnet. Gleiches gilt für den Vektor \mathbf{x} , der die Lage eines geometrischen Punktes innerhalb des Referenzgebietes definiert.

Eulersche Betrachtungsweise

In der Eulerschen Betrachtungsweise bewegt sich der Beobachter nicht. Er verharrt in seiner Position, so dass jede Momentankonfiguration mit der Ausgangskonfiguration identisch ist (siehe Abbildung 2.2).

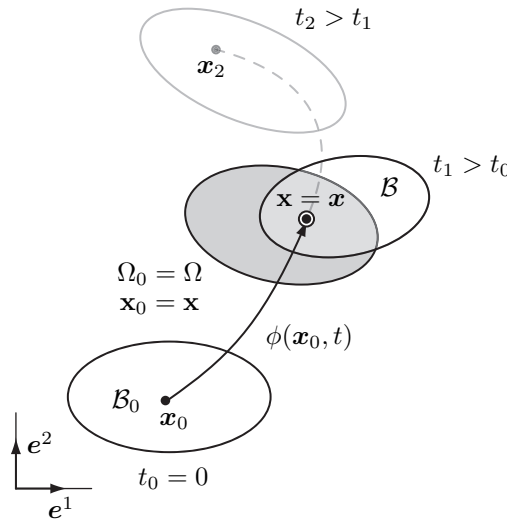


Abbildung 2.2: Eulersche Betrachtungsweise

Im Unterschied zu der Lagrangeschen Betrachtungsweise folgt der Beobachter damit nicht der Bewegung der materiellen Punkte. Er sieht lediglich deren Menge, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in seinem Gebiet befindet. Bewegen sich materielle Punkte über den Rand des Referenzgebietes, verändert sich der vom Beobachter gesehene Bereich des materiellen Körpers, demzufolge die Masseerhaltung in den Satz der Modellgleichungen aufzunehmen ist. Mit der Betrachtungsweise nach Euler wird ein unendlich ausgedehnter materieller Körper mit einem räumlich begrenzten Referenzgebiet beobachtet. Aus diesem Grund wird die Eulersche Betrachtungsweise für die numerische Analyse des Strömungsverhaltens von Fluiden eingesetzt.

Lagrange-Eulersche Betrachtungsweise

Bewegt sich der Beobachter und der materielle Körper entlang unterschiedlicher Bahnen ist die *ALE*-Formulierung der Modellgleichungen zu wählen. In diesem Fall sind die Abbildungen λ und ϕ und somit auch die Abbildung ψ zwischen den Ausgangskonfigurationen zeitveränderlich (siehe Abbildung 2.3). Der Zusammenhang

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial \lambda(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

zwischen den Abbildungen λ und ϕ ist bei der Zeitableitung von Zustandsgrößen des materiellen Körpers zu berücksichtigen, die im Folgenden als materielle Zeitableitung bezeichnet wird. Sie entspricht mit $\dot{(\cdot)} = \frac{d(\cdot)}{dt}$ der totalen Zeitableitung, deren Bedeutung bei der Bewegung der Gebiete zunächst für die Dichte als skalare Zustandsgröße dargestellt ist.

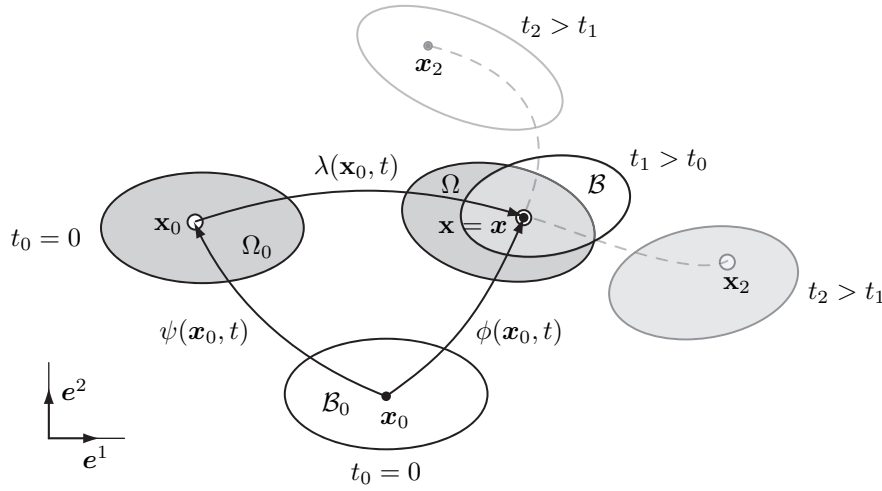


Abbildung 2.3: Lagrange-Eulersche Betrachtungsweise

Abbildung 2.4 zeigt den Bereich eines materiellen Körpers als Linie der Länge $l = 2$. Er bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\|\mathbf{v}\| = 2$. Das Gebiet des Beobachters entspricht den Abmessungen des materiellen Körpers. Die Ausgangskonfigurationen der beiden Gebiete sind um ein Viertel derart versetzt, dass der Beobachter mit einer Geschwindigkeit von $\|\mathbf{v}\| = 1\frac{1}{2}$ den materiellen Körper erst zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{2}$ vollständig sieht. Die Dichte des materiellen Körpers ist zeitlich konstant und verändert sich linear im räumlichen Gebiet.

In der Ausgangskonfiguration sieht der Beobachter am geometrischen Punkt A den materiellen Punkt B mit einer Dichte von $\rho = 1\frac{3}{4}$. In der Momentankonfiguration sieht der gleiche Beobachter zum Zeitpunkt $t = t_1$ den materiellen Punkt C . Dieser hat eine Dichte von $\rho = 1\frac{1}{4}$, so dass der Beobachter eine Veränderung beobachtet. Die Veränderung entspricht mit einem Wert von $-\frac{1}{2}$ der lokalen Ableitung am materiellen Punkt. Total ändert sich die Dichte bezüglich des materiellen Körpers jedoch nicht, demzufolge die totale Zeitableitung

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (2.5a)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t}}_{\text{lokaler Term}} + \underbrace{\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial t}}_{\text{konvektiver Term}} \quad (2.5b)$$

identisch null ist. Sie setzt sich aus einem lokalen und einem konvektiven Term zusammen. Der lokale Term entspricht mit der partiellen Zeitableitung der zuvor beschriebenen Veränderung der Dichte bezüglich des Beobachters. Der konvektive Term berücksichtigt, dass die Position des Beobachters zeitveränderlich und damit die Dichte auch partiell nach dem Raum abzuleiten ist.

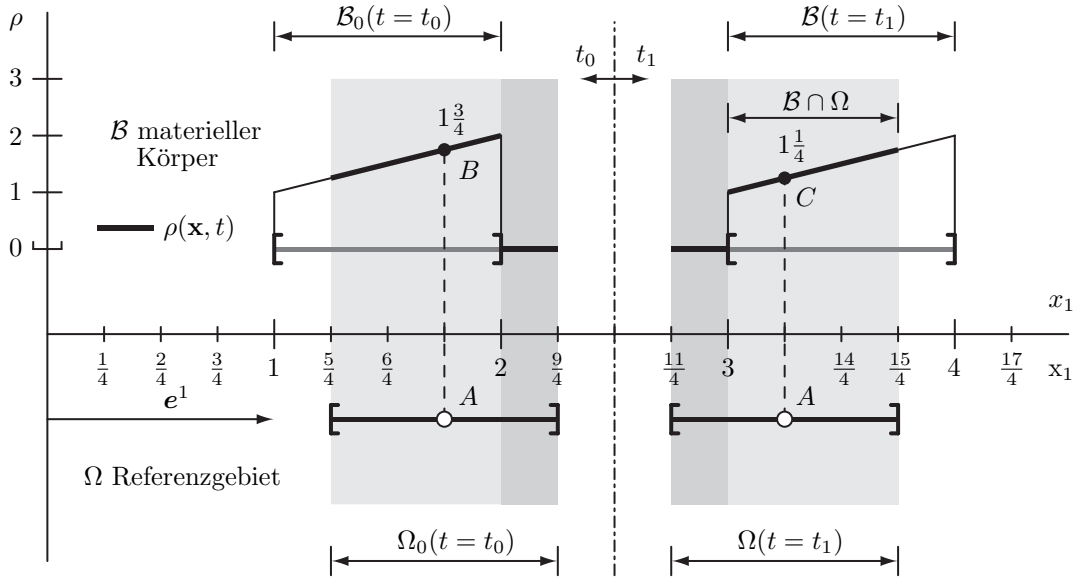


Abbildung 2.4: Materielle Zeitableitung der Dichte

Mit der Bedingung $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ befinden sich ein materieller und ein geometrischer Punkt am selben Ort, so dass mit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial t} \quad \text{und} \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial t} \quad (2.6b)$$

die Ableitung $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial t}$ als Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v} - \mathbf{v}$ zwischen dem materiellen Körper und dem Beobachter interpretierbar ist. Angewendet auf das Geschwindigkeitsfeld ist mit

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{,t} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.7)$$

die Fundamentalgleichung von *ALE*-Formulierungen angegeben, die Gleichung (2.4) entspricht. Mit Gleichung (2.5) und (2.7) sind im Folgenden die Modellgleichungen von Fluiden auf bewegten Gebieten formuliert. Sie gehen für $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in deren Eulersche Formulierung über. Für $\mathbf{v} = \mathbf{v}$ bewegt sich der Beobachter der Lagrangeschen Formulierung entsprechend mit dem materiellen Körper.

2.2 Modellgleichungen in lokaler Form

Im Folgenden sind die Modellgleichungen der Struktur und des Fluids mit den Integralen der Erhaltungsgleichungen (2.1) und (2.3) in ihren lokalen Formen beschrieben. Anschließend sind Übergangsbedingungen für randgekoppelte Mehrfeldprobleme formuliert. Unter Berücksichtigung der Rauigkeit von Oberflächen sind sowohl die Übergangsbedingungen für die Fluid-Struktur als auch für die Struktur-Struktur-Wechselwirkungen angegeben. Sie vervollständigen den Satz der Modellgleichungen für die numerische Analyse von dünnwandigen Silos.

2.2.1 Struktur

Die Verschiebung eines materiellen Punktes $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ist mit seiner aktuellen Position in der Momentankonfiguration \mathbf{x} bezogen auf seine Ausgangslage \mathbf{x}_0 festgelegt. Die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, mit der sich der Punkt bewegt, ist mit der materiellen Zeitableitung seiner Verschiebung bestimmt. Die Gesamtheit der materiellen Punkte definiert die Struktur S . Mit der Annahme, dass sich materielle Teilchen nicht durchdringen und voneinander trennen, ist das Verschiebungsfeld stetig, so dass die Verformung der Struktur mit dem Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u}$ bezogen auf die Referenzkonfiguration beschrieben ist. Mit dem Deformationsgradienten ist der Abstand zweier Punkte in der Momentankonfiguration auf deren Abstand in der Ausgangskonfiguration bijektiv abgebildet (siehe Abbildung 2.1).

Als ein geeignetes Verzerrungsmaß ist der Greensche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.8)$$

mit dem rechten Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ definiert. Er beschreibt die Strukturdeformation in der körperfesten Lagrangeschen Betrachtungsweise und bildet große Rotationen der Struktur als Starrkörperbewegung ab. Die zeitliche Entwicklung des Verzerrungstensors ist mit dessen materieller Zeitableitung formuliert und führt auf den Greenschen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right) = \text{sym}(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}), \quad (2.9)$$

der die Kinematik nachgiebiger Strukturen in Raum und Zeit beschreibt. Er ist vom Geschwindigkeits- und Verschiebungsfeld abhängig, so dass die Kinematik für

eine Beschreibung großer Rotationen von der Lage der materiellen Punkte in der Ausgangskonfiguration beeinflusst wird. Nur im Fall kleiner Deformationen, die mit $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ rotationsfreie Verformungen implizieren, ist der Verzerrungsgeschwindigkeits-tensor bereits vollständig mit dem Geschwindigkeitsfeld definiert.

Die Beanspruchung der Struktur ist in der Referenzkonfiguration mit dem ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ beschrieben, mit dem die Impulserhaltung

$$\mathcal{L}_1^S = \rho_0 \dot{\mathbf{v}} - \nabla_0 \cdot \mathbf{P} - \rho_0 \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

definiert ist.

Mit dem entwickelten mathematischen Modell für die numerische Analyse von Silos ist unterstellt, dass die Verzerrungen stählerner Siloschalen bei großen Rotationen klein sind, so dass deren elastisches Verhalten mit dem Potential

$$\Psi_{\text{el}} = \frac{\lambda_L}{2} (\text{tr}(\mathbf{E}_{\text{el}}))^2 + \mu_L \mathbf{E}_{\text{el}} : \mathbf{E}_{\text{el}} \quad (2.11)$$

eines St.-Venant-Kirchhoff-Materials beschrieben ist. Es ist in Abhängigkeit der Lamé-Konstanten

$$\lambda_L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu_L = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.12)$$

formuliert, die nach Gleichung (2.12) alternativ mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν als Materialparameter bestimmt sind. Mit dem elastischen Potential nach Gleichung (2.11) ist angenommen, dass sich das Material isotrop verhält, wobei die Querdehnzahl im Wertebereich $0 \leq \nu < 0,5$ definiert ist. Mit dem Elastizitätsmodul und der Querdehnzahl ist im Folgenden das elastische Verhalten metallischer Werkstoffe beschrieben. Für die Beschreibung von Schüttgütern als Festkörper sind die Materialparameter mit

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{3K-2G}{6K+2G} \quad (2.13)$$

in Abhängigkeit zum Kompressionsmodul K und dem Schubmodul G bestimmt. Der Zusammenhang zwischen den elastischen Verzerrungen, mit denen Gleichung (2.11) formuliert ist, und den totalen Verzerrungen der Kinematik ist mit der Verzerrungsbilanz

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{el}} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

in Ratenformulierung gegeben. Der Zusammenhang zwischen dem zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi_{\text{el}}}{\partial \mathbf{E}}$ und dem Green'schen Verzerrungstensor ist mit dem elastischen Potential Ψ_{el} gegeben:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{el}} = \mathbb{F} : \dot{\mathbf{S}} \quad (2.15)$$

Der Flexibilitätstensor

$$\mathbb{F} = \mathbb{C}^{-1} \quad \text{entspricht mit} \quad \mathbb{C} = \frac{\partial^2 \Psi_{\text{el}}}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (2.16)$$

dem Elastizitätstensor \mathbb{C} in seiner inversen Form und bildet die zeitlichen Veränderungen in den Spannungen auf die elastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten ab. Mit der konstitutiven Gleichung (2.15) ist berücksichtigt, dass das elastische Potential zeitkonstant ist (vergleiche BONET [7]).

Für kleine Verzerrungen wird die Bilanzgleichung (2.14) mit dem Tensor plastischer Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{vp}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi_{\text{vp}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.17)$$

additiv erweitert. Die Geschwindigkeit, mit der sich viskoplastische Verzerrungen entwickeln, ist nach CHABOCHE [11] mit der viskoplastischen Vergleichsdehnrate

$$\dot{\lambda} = \left\langle \frac{\sigma_{\text{ex}}}{d} \right\rangle^n \quad (2.18)$$

bestimmt. Sie hängt von der Überspannung σ_{ex} und den Modellparametern d und n ab. Der Modellparameter d ist für einen Spannungsexponenten $n = 1$ als Viskosität η eines Newton'schen Dämpfers gegeben. Für $n > 1$ legt d den Wert der Überspannung fest, ab der sich plastische Verzerrungen überproportional entwickeln. Die Überspannung ist mit

$$\sigma_{\text{ex}} = \sigma_v - (\sigma_y + \chi), \quad (2.19)$$

gegeben. Sie ist die um die Fließspannung σ_y und die isotrope Verfestigung χ reduzierte Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \alpha_v I_1(\boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}}) + \sqrt{3 I_2(\boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}}^{\text{d}}) + \left\langle \text{sgn}(I_1(\boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}})) \beta (I_1(\boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}}))^2 \right\rangle}. \quad (2.20)$$

Während die Fließspannung Modellparameter ist, sind sowohl die Vergleichsspannung als auch die isotrope Verfestigung zeitveränderliche Zustandsgrößen. Die Vergleichsspannung ist mit dem effektiven Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{ef}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} \quad (2.21)$$

in Abhängigkeit des Cauchy-Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (2.22)$$

und des Tensors $\boldsymbol{\alpha}$ der kinematischen Verfestigung bestimmt. Beide Spannungsmaße beschreiben die Beanspruchung von Strukturen in ihrer Momentankonfiguration. Mit der Transformationsvorschrift in Gleichung (2.22) sind auch die zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen in der Ausgangskonfiguration gegeben.

Die Vergleichsspannung σ_v ist in Anlehnung an das Materialmodell nach Drucker-Prager definiert, das für die Beschreibung des plastischen Verhaltens bindiger Böden entwickelt wurde und im Folgenden für die Modellierung der Grenzspannungen von Schüttgütern als Festkörper verwendet wird. Für $\alpha_v = \beta = 0$ ist die Vergleichsspannung nach von Mises enthalten. Die Fließfläche ist mit $\sigma_{\text{ex}} = 0$ festgelegt und umhüllt den Raum von Spannungszuständen, bei denen sich Strukturen elastisch verformen. In Abbildung 2.5a ist die Fließfläche nach von Mises der Fließfläche nach Drucker-Prager im Hauptspannungsraum gegenübergestellt. Die Hauptspannungen σ_i sind mit der Eigenwertaufgabe

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi}_i = \sigma_i \boldsymbol{\phi}_i \quad (2.23)$$

festgelegt.

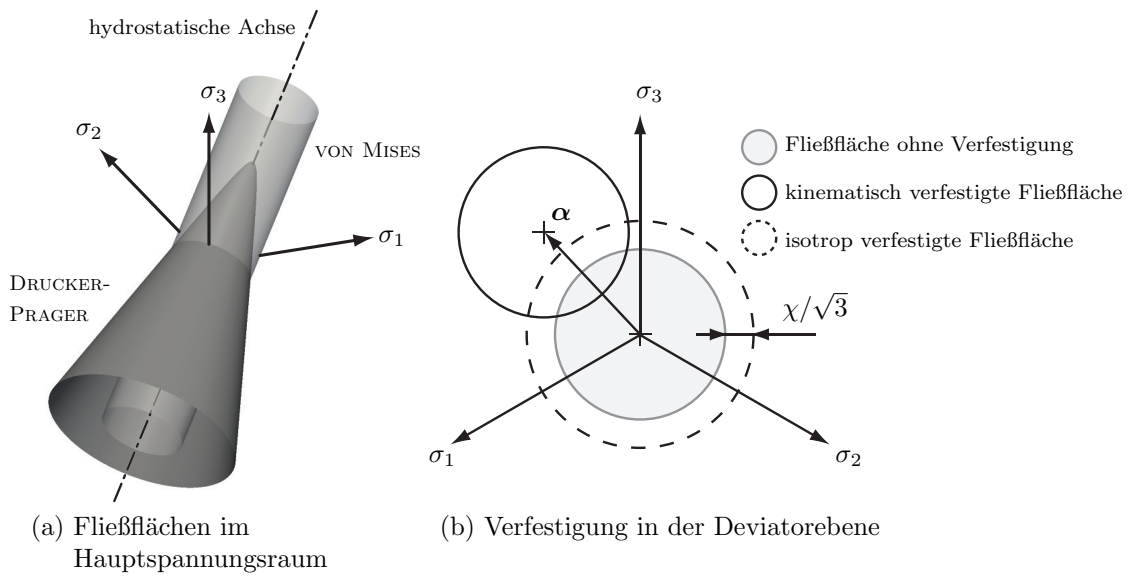


Abbildung 2.5: Fließbedingung

Mit isotoper und kinematischer Verfestigung ist das plastische Materialverhalten metallischer Werkstoffe unter erhöhter und zyklischer Beanspruchung beschreibbar. Die isotope Verfestigung weitet die Fließfläche um die hydrostatische Achse gleichmäßig auf. Der Tensor der kinematischen Verfestigung verschiebt die Fließfläche in der Deviatorebene (siehe Abbildung 2.5b). Die Evolutionsgleichungen

$$\dot{\chi} = b_{\chi} (q_{\chi} - \chi) \dot{\lambda} \quad \text{und} \quad (2.24a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = b_{\alpha} \left(\frac{2}{3} q_{\alpha} \frac{\partial \Psi_{\text{vp}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\alpha} \right) \dot{\lambda} \quad (2.24b)$$

bestimmen die zeitliche Entwicklung der Verfestigungen in Abhängigkeit der Modellparameter b_i und Q_i . Die Geschwindigkeit, mit der sich die jeweilige Verfestigung entwickelt, wird mit den Parametern b_{χ} und b_{α} gesteuert. Die Sättigungsparameter Q_{χ} und Q_{α} begrenzen die Intensität der isotopen beziehungsweise kinematischen Verfestigung.

Die Richtung viskoplastischer Verzerrungen ist nach Gleichung (2.17) mit der Ableitung des plastischen Potentials

$$\Psi_{vp} = \alpha_\Psi I_1(\boldsymbol{\sigma}_{ef}) + \sqrt{3 I_2(\boldsymbol{\sigma}_{ef}^d) + \left\langle \text{sgn}(I_1(\boldsymbol{\sigma}_{ef})) \beta (I_1(\boldsymbol{\sigma}_{ef}))^2 \right\rangle} \quad (2.25)$$

nach dem Cauchy-Spannungstensor bestimmt. Der Dilatanzwinkel $\psi = \tan(\alpha_\Psi/3)$ bestimmt den Anteil volumetrischer plastischer Verzerrungen und spezifiziert die Eigenschaft von Schüttgütern, ihr Volumen unter der Einwirkung von Scherkräften durch Auflockerung zu vergrößern (siehe Abbildung 2.6). Mit der Fließrichtung nach Gleichung (2.17) vergrößert sich das Volumen des Schüttgutes, auch wenn es mit einer hydrostatischen Spannung außerhalb der Fließfläche beansprucht ist.

Im Folgenden ist das mechanische Verhalten des Schüttgutes mit einem Dilatanzwinkel von $\psi = 0$ angenähert. Mit dem Parameter $0 < \beta \ll 1$ ist die Fließfläche nach Drucker-Prager in Form des in Abbildung 2.5a dargestellten Kegels an dessen Spitze abgerundet und die Fließrichtung modifiziert. Damit kann für $p < 0$ bei $\alpha_\Psi = 0$ die Impulsgleichung auch für Spannungszustände erfüllt werden, deren hydrostatische Spannung außerhalb der Fließfläche liegt.

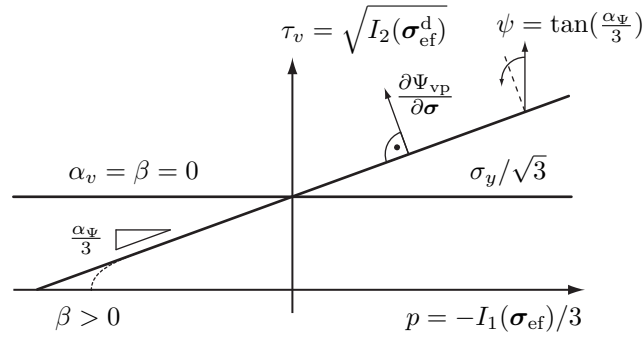


Abbildung 2.6: Fließrichtung

Rand- und Anfangsbedingungen

Die Impulsgleichung erfordert zusammen mit der Kinematik nach Gleichung (2.10) für eine spezielle Lösung die Vorgabe von Rand- und Anfangsbedingungen. Als Randbedingung ist auf dem Dirichlet-Rand mit

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad (2.26)$$

die eingeprägte Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}}$ definiert und auf dem Neumann-Rand der Fluss

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0 \quad (2.27)$$

mit der einwirkenden Randspannung $\bar{\mathbf{t}}_0$. Die Anfangsbedingungen sind mit der Verschiebung

$$\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.28)$$

und der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0 \quad (2.29)$$

festgelegt. Bei sich viskoplastisch verfestigenden Materialien sind für eine spezielle Lösung der Evolutionsgleichungen (2.24a) und (2.24b) die Werte ihrer Beschreibungsvariablen zum Zeitpunkt t_0 mit

$$\chi(t=0) = \chi_0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\alpha}(t=0) = \boldsymbol{\alpha}_0 \quad (2.30)$$

gesetzt.

Elastoviskoplastizität am materiellen Punkt

Das nichtlineare Verformungsverhalten einer Struktur mit elastisch-viskoplastischem Materialverhalten ist an einem uniaxial und zyklisch beanspruchten materiellen Punkt verdeutlicht. Der zyklische Verlauf der eingeprägten Verzerrung ist mit

$$\varepsilon_{11} = \int \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) dt \quad (2.31)$$

in Abhängigkeit zur Periodendauer T beschrieben. Die Entwicklung der Spannung eines sich nicht verfestigenden materiellen Punktes ist in Abbildung 2.7a für unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeiten gegenübergestellt.

So steigt mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit der Wert der Überspannung mit einem ausgeprägten Übergangsbereich zwischen rein elastischen und auch plastischen Verzerrungen an. Für $T \rightarrow \infty$ verzerrt sich der materielle Punkt im Grenzfall elastisch-idealplastisch. Die für $T = T_3$ mit zunehmender Verzerrung abfallende Spannung ist Folge der Belastungsgeschwindigkeit die um $T_3/4$ phasenverschoben zu der Verzerrung ist. Das Spannungs-Verzerrungs-Diagramm zeigt, dass das viskoplastische Verhalten einer Hysterese folgt, so dass der Spannungszustand von der Belastungsgeschichte abhängig ist. Die vom Spannungspfad eingeschlossene Fläche entspricht dem Teil der geleisteten Arbeit, der dem materiellen Punkt als dissipierte Energie nicht mehr zur Verfügung steht. Die isotope Verfestigung verändert die Form der Hystereseschleife. Die Erhöhung der Fließspannung um die isotope Verfestigung verkleinert die von dem Spannungspfad umschriebene Fläche, die dissipierte Energie verringert sich. Das zugehörige Spannung-Dehnungs-Diagramm ist in Abbildung 2.7b dargestellt. Es zeigt, dass die Hystereseschleife zusammen mit dem Wert der isotropen Verfestigung gegen einen stationären Zustand strebt. Abbildung 2.7c zeigt, dass sich ein kinematisch verfestigter materieller Punkt nach Umkehr der Belastungsrichtung bereits unterhalb der Fließspannung plastisch verzerrt. Dieses Tragverhalten kennzeichnet den Bauschinger-Effekt, der bei zyklisch beanspruchten, metallischen Werkstoffen beobachtet wird. Im Unterschied zu der isotropen Verfestigung kann die kinematische Verfestigung mit Umkehr der Belastungsrichtung abgebaut werden. Die Interaktion zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung führt auf die Hystereseschleife in Abbildung 2.7d. Der Vergleich der Zeitverläufe beider Verfestigungen zeigt, dass sich der Wert der kinematischen Verfestigung exponentiell mit steigender Intensität der isotropen Verfestigung verringert.

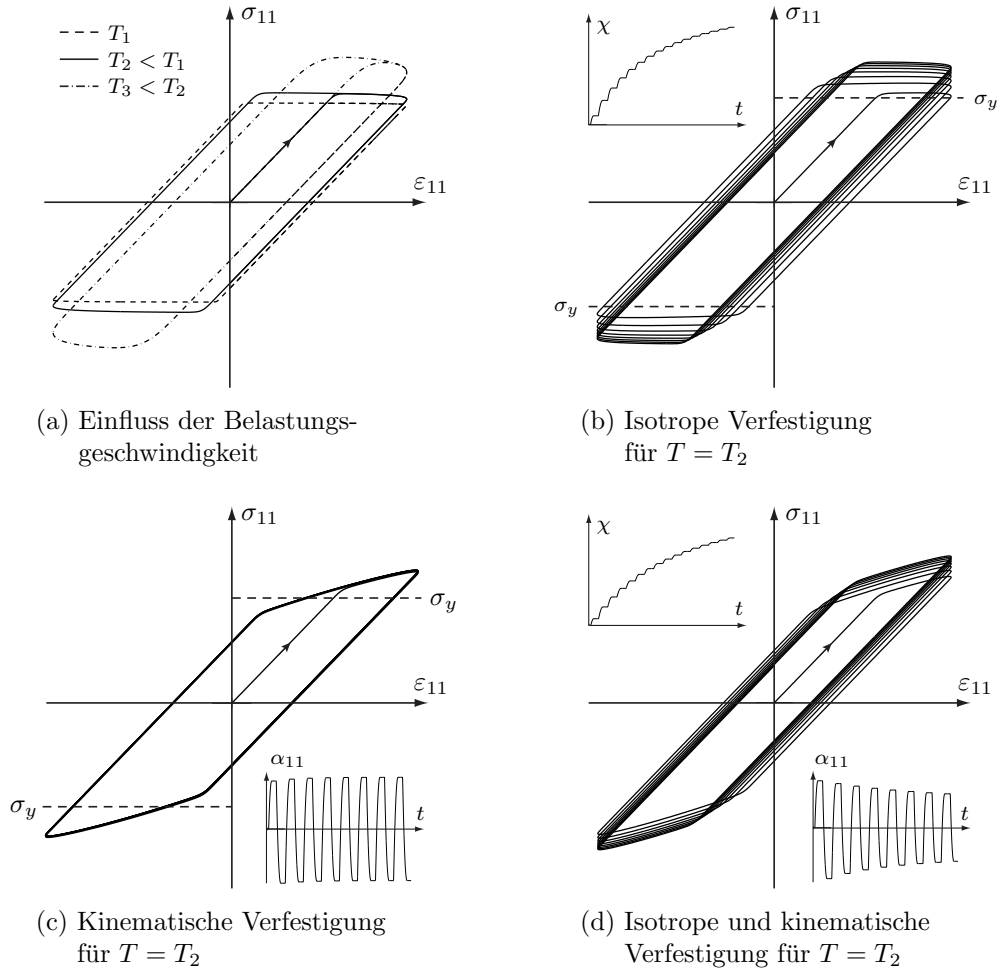


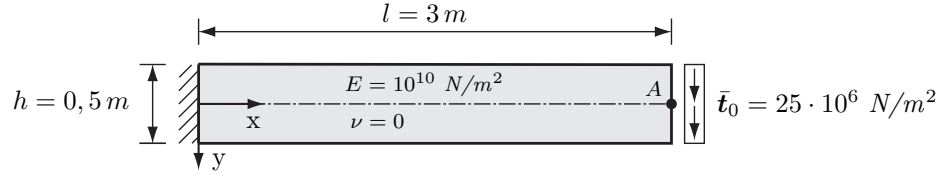
Abbildung 2.7: Spannungs-Verzerrungs-Diagramme

Rotationen

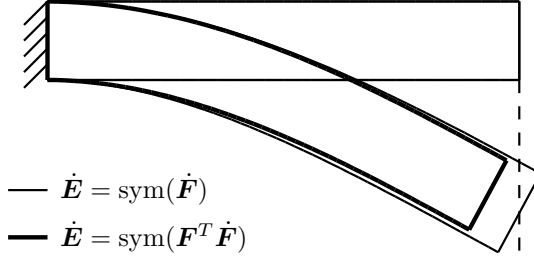
Die Auswirkung der mit der Kinematik nach Gleichung (2.9) berücksichtigten Rotation auf die Verformung von Strukturen ist an einem Kragarm verdeutlicht. Der Kragarm ist als räumliches Tragwerk modelliert, das an seinem freien Ende mit einer Schubspannung beansprucht wird (siehe Abbildung 2.8a).

Die Verschiebungen sind unter Vernachlässigung der Querdehnung mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode nach Kapitel 3.2.1.1 berechnet. Die Struktur ist entlang der x-Achse mit 50 Elementen für eine trilineare Approximation der Verschiebungen beschrieben. Mit den gewählten linearen Ansätzen ist der Querschnitt des Kragarms auch im verformten Zustand eben. Der Verschiebungszustand ist in der Ebene der Belastung in Abbildung 2.8b sowohl für lineares als auch nichtlineares Verformungsverhalten dargestellt.

Ist mit $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ unterstellt, dass die Verzerrungsgeschwindigkeiten linear vom Geschwindigkeitsfeld abhängig sind, verschiebt sich der materielle Punkt A senkrecht zu der Schwerachse des Kragarms im unbeanspruchten Zustand.



(a) Strukturmodell



(b) Verformung des Kragarms

Kinematik	Verschiebung	
	$u_x^A [m]$	$u_y^A [m]$
$\dot{\mathbf{E}} = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}})$	0,000	1,095
$\dot{\mathbf{E}} = \text{sym}(\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})$	-0,200	0,981

(c) Verschiebung des materiellen Punktes A

Abbildung 2.8: Verformungsverhalten eines Kragarms

Ist die Kinematik mit Gleichung (2.9) hingegen vollständig beschrieben, verschieben sich die materiellen Punkte der Struktur entsprechend der Theorie großer Rotationen auf gekrümmten Bahnen um die feste Einspannung. Die in Tabelle 2.8c angegebenen Verschiebungen zeigen, dass sich in diesem Fall der materielle Punkt A in Richtung beider Achsen verschiebt.

2.2.2 Fluid

Das Strömungsverhalten kompressibler Fluide wird mit den um die Energieerhaltung reduzierten Navier-Stokes-Gleichungen in der Eulerschen Betrachtungsweise beschrieben. Mit der Eulerschen Betrachtungsweise ist neben der Impulserhaltung auch die Masseerhaltung formuliert. In den Grundgleichungen

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (2.32a)$$

$$\mathcal{L}_M = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.32b)$$

sind die Impulsdichte $\rho \mathbf{v}$ und die Dichte ρ als konservative Beschreibungsvariablen formuliert. Mit der Anwendung des Divergenzoperators auf das dyadische Produkt $\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ kann die materielle Zeitableitung der Impulsdichte mit

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \quad (2.33)$$

umgeformt werden. Die ersten zwei Terme auf der rechten Seite der Gleichung (2.33) sind mit der Masseerhaltung (2.32b) identisch, so dass die Impulserhaltung (2.32a) alternativ in der nicht konservativen Form

$$\mathcal{L}_I = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

beschrieben ist. Die nicht konservative Form der Impulserhaltung setzt voraus, dass die Masseerhaltung an jedem Punkt in Raum und Zeit erfüllt ist.

Der Cauchy-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.35)$$

setzt sich aus dem Druck p und dem Spannungsdeviator

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \mu_{\text{ef}} \mathbf{D}^{\text{d}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}^{\text{d}} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \quad (2.36)$$

zusammen. Der Spannungsdeviator ist mit der effektiven dynamischen Viskosität μ_{ef} und dem deviatorischen Anteil des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \quad (2.37)$$

verknüpft, der die Kinematik von Fluiden aus der Eulerschen Betrachtungsweise mit einer linearen Abbildung des Geschwindigkeitsfeldes vollständig beschreibt. Im Gegensatz zu der Strukturmechanik sind die deviatorischen Spannungen an einem materiellen Punkt im Gebiet des Fluids nur vom Geschwindigkeitsfeld abhängig und nicht von dessen Lage in der Ausgangskonfiguration. Die Fließeigenschaften von Schüttgütern sind neben dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor mit der effektiven dynamischen Viskosität

$$\mu_{\text{ef}} = \rho \nu + \frac{\tau_y}{2(\dot{\gamma} + \epsilon)} \quad (2.38)$$

eines viskoplastischen Bingham-Fluids beschrieben. Sie setzt sich additiv aus der dynamischen Viskosität $\mu_L = \rho \nu$ als zweite Lamé-Konstante und der Fließspannung τ_y zusammen, die auf die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma} = \sqrt{I_2(\mathbf{D}^{\text{d}})}$ bezogen ist. Der Übergang zwischen nahezu ruhendem und strömendem Fluid ist mit der Fließspannung $\tau_y = \langle p \tan(\phi_i) + c \rangle$ in Anlehnung an das Modell von MCTIGUE [62] festgelegt. Sie ist entsprechend dem Materialmodell nach Drucker-Prager von der Kohäsion c und dem inneren Reibwinkel ϕ_i als Modellparameter abhängig und erhöht sich linear mit steigendem Druck. Die Bijektivität bezüglich der Vergleichsspannung $\tau_{eq} = \sqrt{I_2(\boldsymbol{\tau})}$ und der Schergeschwindigkeit wird mit dem Regularisierungsparameter $\epsilon \ll 1$ hergestellt. Der Einfluss des Regularisierungsparameters auf die Vergleichsspannung ist in Abbildung 2.9a dargestellt. Sie zeigt, dass der Phasenübergang zwischen ruhendem und strömendem Fluid umso deutlicher ausgeprägt ist, je kleiner der Wert des Regularisierungsparameters ist. Für $\tau_y = 0$ beeinflusst die erste Lamé-Konstante die Geschwindigkeit, mit der sich volumetrische Verzerrungen entwickeln. Sie ist nach Gleichung (2.36) mit $\lambda_L = -\frac{2}{3} \mu_L$ implizit festgelegt. Die Intensität der volumetrischen Verzerrung ε_v ist mit der Zustandsgleichung für den Druck

$$p = -K \ln(1 + \varepsilon_v) \quad (2.39)$$

bestimmt, deren Kompressionsmodul K den Satz der Modellparameter vervollständigt. Die Zustandsgleichung ist für die Abbildung hoher Verdichtungen in Anlehnung an die natürlichen Verzerrungen der Strukturmechanik aufgestellt. Die volumetrische Verzerrung $\varepsilon_v = \Delta V/V_0$ beschreibt die Veränderung des Volumens ΔV bezogen

auf das Volumen der Ausgangskonfiguration. Mit der Eulerschen Betrachtungsweise erfordert deren Berechnung eine Bahnverfolgung der materiellen Punkte, so dass sie alternativ mit der Dichte ρ als Beschreibungsvariable wie folgt gegeben ist.

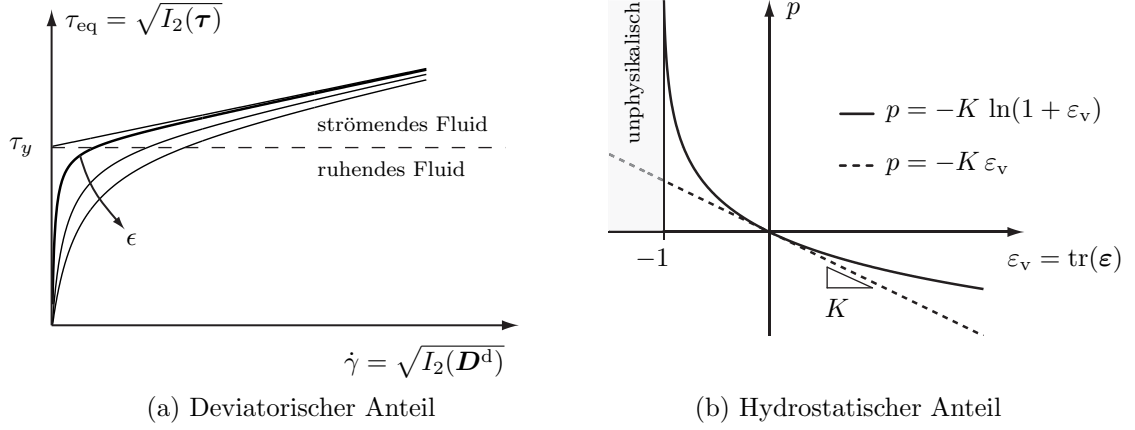


Abbildung 2.9: Spannungs-Verzerrungs-Charakteristik

Mit der Masseerhaltung $\rho_0 V_0 = \rho (V_0 + \Delta V)$ ist die volumetrische Verzerrung

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \quad (2.40)$$

mit der Dichte beschrieben. Mit der Reihenentwicklung

$$\ln(1 + \varepsilon_v) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\varepsilon_v^i}{i} \quad \text{im Konvergenzbereich} \quad -1 < \varepsilon_v \leq 1 \quad (2.41)$$

ist der Bezug zu dem elastischen Potential eines St.-Venant-Kirchhoff-Materials hergestellt (vergleiche Kapitel 2.2.1). Die für $n = 1$ abgeleitete Zustandsgleichung

$$p = -K \varepsilon_v \quad (2.42)$$

stellt im Vergleich mit Gleichung (2.39) nicht sicher, dass der Druck für $\varepsilon_v \rightarrow -1$ über alle Grenzen anwächst, so dass sie sich nur bedingt für die Abbildung von Verdichtungszoneen eignet (siehe Abbildung 2.9b). Ist das Fluid nahezu inkompressibel, verändert sich die Dichte in ihrem Verlauf unwesentlich. Mit der Annahme einer in Raum und Zeit konstanten Dichte geht die Masseerhaltung (2.32b) in die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.43)$$

über, die ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld fordert. In diesem Fall ist der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{D} = \mathbf{D}^d$ identisch mit seinem deviatorischen Anteil. Weiterhin entfällt die Zustandsgleichung für den Druck, dessen Veränderung am materiellen Punkt mit $\nabla \cdot \mathbf{v}$ bestimmt ist.

Rand- und Anfangsbedingungen

Entsprechend der Differentialgleichungen der Strukturmechanik sind auch für eine spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems (2.32) die Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad (2.44)$$

auf dem Dirichlet-Rand mit den vorgegebenen Randgeschwindigkeiten $\bar{\mathbf{v}}$ gesetzt. Auf dem Neumann-Rand ist mit

$$(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}_{\text{adv}} - \bar{\mathbf{t}}_{\text{vis}} \quad (2.45)$$

neben dem viskosen Fluss $\bar{\mathbf{t}}_{\text{vis}}$ auch der advective Fluss $\bar{\mathbf{t}}_{\text{adv}}$ infolge der Eulerschen Betrachtungsweise definiert. Für die Masseerhaltung ist keine Randbedingung explizit formuliert, da sie nach Gleichung (2.33) ein Bestandteil der Impulserhaltung ist. Als Anfangsbedingungen sind die Impulsdichte mit

$$\rho \mathbf{v}(t = 0) = \rho \mathbf{v}_0 \quad (2.46)$$

und die Dichte mit

$$\rho(t = 0) = \rho_0 \quad (2.47)$$

auf dem räumlichen Gebiet mit $\rho \mathbf{v}_0$ beziehungsweise ρ_0 vorgegeben. Für eine ausführlichere Darstellung der Grundgleichungen der Fluidmechanik ist auf Truckenbrodt [64] und [65] verwiesen.

Laminare Rohrströmung

Die Charakteristik der viskoplastischen Strömung von Bingham-Fluiden wird an der laminaren Rohrströmung verdeutlicht. Der Verlauf der Geschwindigkeit wird über den Querschnitt des zylindrischen Rohres in Abhängigkeit zu dessen Radius R für inkompressible Strömungen von MAGNUS [44] hergeleitet. Er ist für einen Vergleich zusammen mit dem Geschwindigkeitsverlauf newtonscher Fluide in Tabelle 2.1 angegeben und in Abbildung 2.10b dargestellt.

Materialmodell	Geschwindigkeit
$\tau = \mu_L v_{,r}$	$v(r) = v_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$
$\tau = \tau_y + \mu_L v_{,r}$	$v(r) = \frac{\Delta p R^2}{4 \mu_L L} \begin{cases} \left(1 - \frac{r_0}{R}\right)^2 & \text{für } r \leq r_0 \\ \left(1 - \frac{r}{R}\right) \left(1 - \frac{2r_0}{R} + \frac{r}{R}\right) & \text{für } r > r_0 \end{cases}$ <p style="text-align: center;">mit der Rohrlänge L, der Druckdifferenz Δp und $r_0 = \frac{2 \tau_y L}{\Delta p}$</p>

Tabelle 2.1: Ortsabhängige Geschwindigkeit

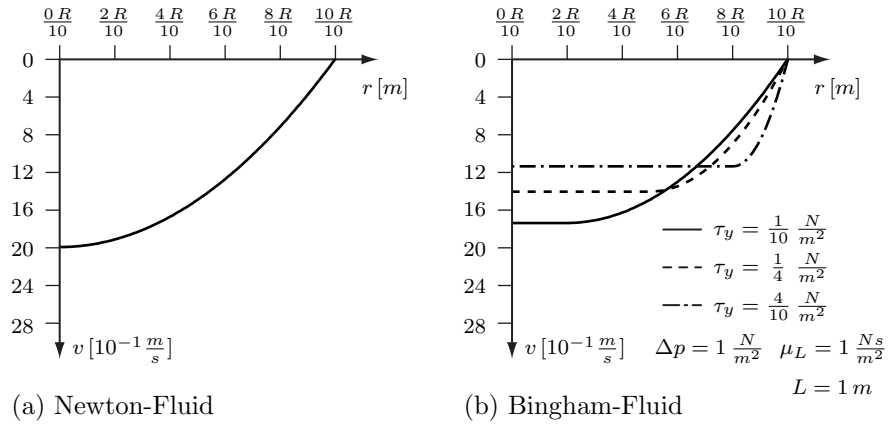


Abbildung 2.10: Geschwindigkeitsprofile laminarer Rohrströmungen

Im Vergleich mit dem in Abbildung 2.10a dargestellten Geschwindigkeitsprofil eines newtonschen Fluids sind in einem Bingham-Fluid zwei Bereiche unterschiedlicher Strömungscharakteristik vorhanden. Gleiten die materiellen Punkte in einem newtonschen Fluid unter der Wirkung von Scherkräften über den gesamten Querschnitt gegeneinander ab, wird das Fluid für $\tau_y > 0$ im inneren Bereich des Rohres mit einer konstanten Strömungsgeschwindigkeit als Starrkörper transportiert. Der äußere Bereich wird mit der Grenzschicht entlang der Rohrwand beschrieben, die mit einem ausgeprägten Gradienten im Geschwindigkeitsverlauf charakterisiert ist. Es ist festzuhalten, dass sich unter sonst konstanten Bedingungen die maximale Strömungsgeschwindigkeit mit steigender Fließspannung reduziert.

Konsolidierung

Die Verdichtung von kompressiblen Fluiden ist in Raum und Zeit für die Zustandsgleichungen (2.39) und (2.42) mit der Konsolidierung einer Flüssigkeitssäule untersucht, deren Kompressionsmodul im Bereich $5 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 \leq K \leq 15 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$ variiert. Die Absenkung der freien Oberfläche der in Abbildung 2.11a dargestellten Säule ist mit der *FFEM* nach Kapitel 6.2.2 berechnet. Die Dichte ist initial mit $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ konstant über die 1 m hohe Säule verteilt, so dass sich diese infolge der Erdbeschleunigung von $\|\mathbf{g}\| = 9,81 \text{ m/s}^2$ verdichtet. Dazu wird die Erdbeschleunigung innerhalb einer Sekunde und mit dem Verlauf eines Hermite-Polynom dritter Ordnung kontinuierlich gesteigert. Die dynamische Viskosität ist mit einem Wert von $\nu = 5 \text{ m}^2/\text{s}$ derart hoch angesetzt, dass sich die freie Oberfläche mit einer Kriechbewegung absenkt.

Die Absenkung der freien Oberfläche und die Entwicklung des räumlichen Verlaufs der Dichte ist in Abbildung 2.11b für einen Kompressionsmodul von $K = 5 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$ dargestellt. Sie zeigt, dass sich die Dichte mit zunehmendem Abstand von der freien Oberfläche im konsolidierten Zustand überproportional erhöht. Der nichtlineare Verlauf ist neben der Zustandsgleichung (2.39) im Wesentlichen von der veränderlichen Wichte bestimmt. Sie ist mit $\gamma = \|\rho \mathbf{g}\|$ linear von der Dichte abhängig, infolgedes-

sen der Druck über die Höhe der Säule mit einer nichtlinearen Funktion beschrieben wird. In Bezug auf die numerische Analyse der Entleerung von Silos ist festzuhalten, dass sich mit der Zustandsgleichung (2.39) das Schüttgut lokal stark verdichten kann.

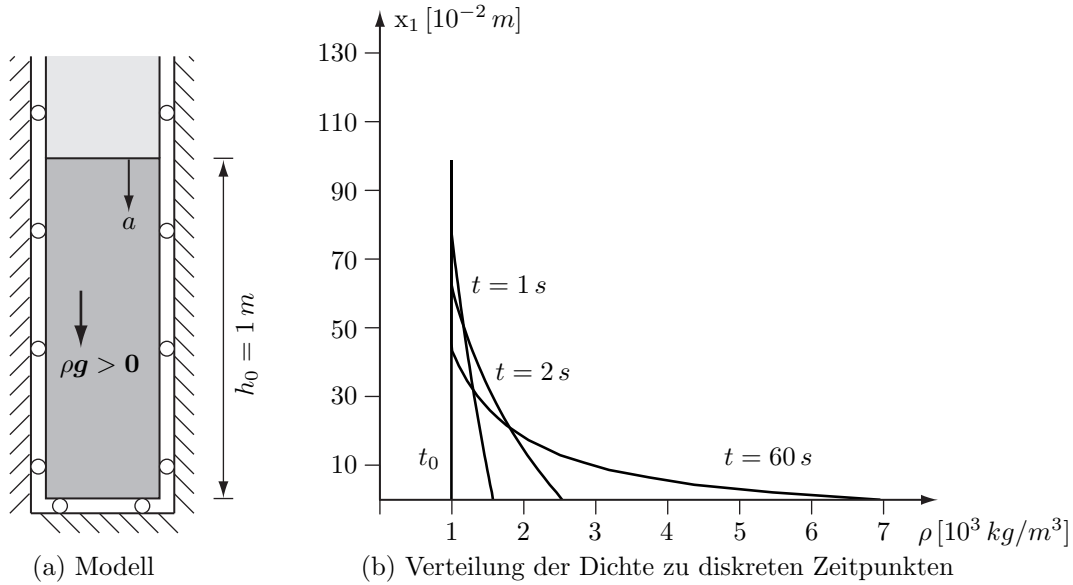


Abbildung 2.11: Konsolidierung einer Fluidsäule

Die signifikante Verdichtung zeigt sich besonders deutlich mit dem Wert der Dichte am Fußpunkt der Säule. In Abbildung 2.12 ist dessen zeitliche Entwicklung in Abhängigkeit zur Zustandsgleichung und zum Kompressionsmodul dargestellt. Die in Abbildung 2.12a für den Zeitpunkt $t = 60$ s angegebenen Werte zeigen, dass sich das Fluid mit abnehmendem Kompressionsmodul überproportional verdichtet. Aus der zeitlichen Entwicklung ist ersichtlich, dass auch im Fall eines Kompressionsmoduls von $K = 5 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$ die quasi-statische Gleichgewichtslage nach $t \approx 60$ s erreicht ist. Demgegenüber vergrößert sich der Wert der Dichte für $K < 10.000 \text{ N/m}^2$ auch noch nach 60 s deutlich, wenn der Druck mit der linearen Zustandsgleichung (2.42) beschrieben ist. Der Gültigkeitsbereich der verschiedenen Zustandsgleichungen zeigt sich mit den in Abbildung 2.13 dargestellten Zeitverläufen des Drucks.

In der Gleichgewichtslage entspricht der Wert des Drucks am Fußpunkt der Säule exakt der flächenbezogenen Wichte der Säule $\gamma/A = \rho_0 \|g\| h_0 = 9810 \text{ N/m}^2$. Während der Wert des Drucks im Fall der nichtlinearen Zustandsgleichung unabhängig vom Wert des Kompressionsmoduls exakt abgebildet ist, weicht er bereits bei einem Kompressionsmodul von $K = 10 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$ signifikant von der analytischen Lösung ab, wenn die lineare Zustandsgleichung zugrunde gelegt ist (vergleiche Abbildung 2.13a mit 2.13b). Aus den in Abbildung 2.14b dargestellten Absenkungen der freien Oberfläche ist ersichtlich, dass insbesondere bei einem Kompressionsmodul von $K = 5.000 \text{ N/m}^2$ die analytische Lösung für die statische Gleichgewichtslage nicht mit einem positiven Volumen der Fluidsäule erreicht werden kann (vergleiche Abbildung 2.9b). Im Gegensatz dazu zeigen die in Abbildung 2.14a dargestellten Werte, dass sich mit der nichtlinearen Zustandsgleichung die freie Oberfläche stets im Gebiet der Fluidsäule bewegt.

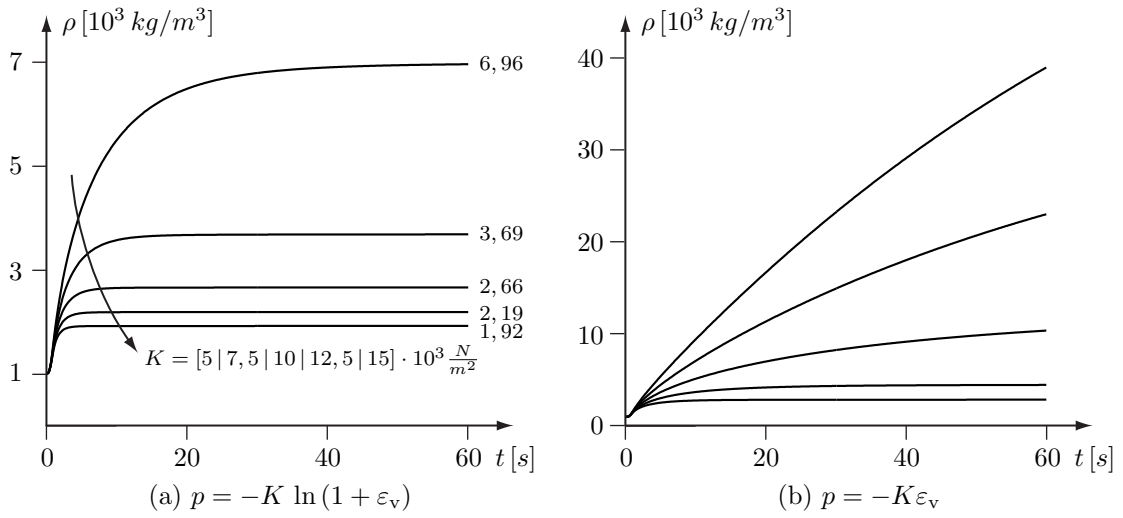


Abbildung 2.12: Dichte am Grund der Säule

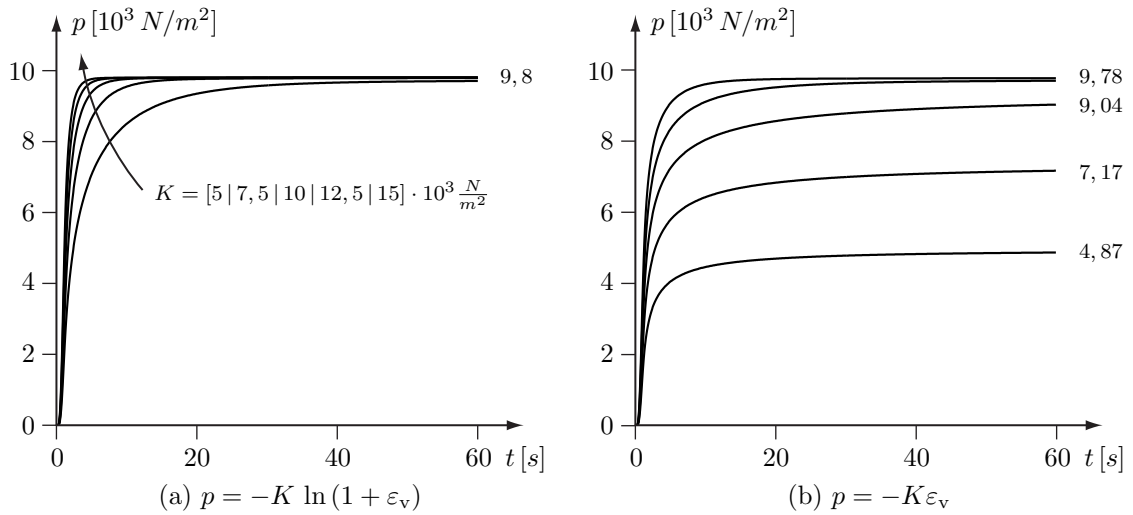


Abbildung 2.13: Druck am Grund der Säule

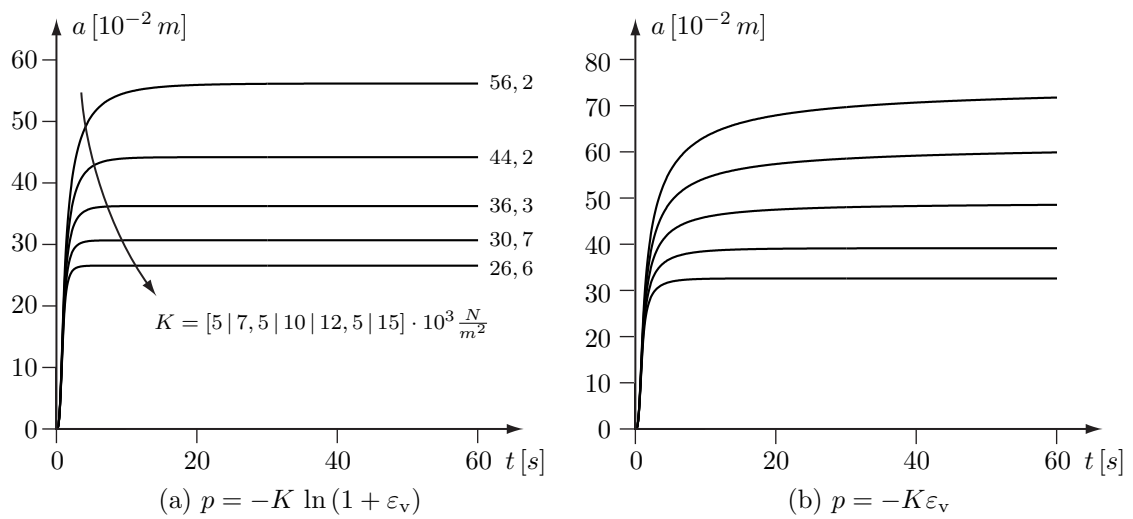


Abbildung 2.14: Absenkung der Oberfläche

2.2.3 Kopplungen

Die Übergangsbedingungen beschreiben die Wechselwirkung zwischen dem Schüttgut und der umschließenden Siloschale. Wenn das mechanische Verhalten des Schüttgutes alternativ als Struktur und Fluid beschrieben wird, müssen die Übergangsbedingungen sowohl für eine Fluid-Struktur-Kopplung als auch für eine Kopplung zweier Strukturen im Folgenden definiert sein. Nachfolgend ist das Fluid mit F und die Struktur mit S bezeichnet. Im Fall der Struktur-Struktur-Kopplung sind die unterschiedlichen Gebiete mit S_1 und S_2 bezeichnet.

Fluid-Struktur-Kopplung

Die numerische Analyse von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen erfordert mit der kinematischen Bedingung

$$\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S = \mathbf{0} \quad (2.48)$$

die Identität der Geschwindigkeitsfelder entlang des gemeinsamen Randes. Mit

$$\mathbf{t}_0^S = -\mathbf{t}^F \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} \quad (2.49)$$

sind die Gebiete statisch gekoppelt und als Übergangsbedingungen zwischen Fluid und Struktur gefordert. Dabei sind mit $\frac{d\Gamma}{d\Gamma_0}$ in Gleichung (2.49) die verschiedenen Konfigurationen aufeinander abgebildet, in denen die Modellgleichungen beschrieben sind. Die unterschiedlichen Vorzeichen der Oberflächenspannungen folgen mit dem Integralsatz nach Gauß und berücksichtigen, dass sich die zu koppelnden Gebiete gegenüberliegen. Die Modellierung der Wandreibung erfolgt auf Grundlage des zweiten Amontonschen Gesetzes. Es besagt, dass die Reibkraft der Normalkraft zwischen den Reibflächen proportional ist. Befindet sich das Fluid in der Gleichgewichtslage, beschreibt allein der hydrostatische Druck den Spannungszustand entsprechend Gleichung (2.35) und (2.36). Demzufolge werden Schubspannungen nur übertragen, wenn das Fluid in Bewegung ist und mit der Differenzgeschwindigkeit Δv_l gegenüber der Struktur abgeleitet. Gleitet auch das Fluid ab, ist weiterhin sicher zu stellen, dass sich die Gebiete normal zum Rand nicht durchdringen und voneinander ablösen können, demzufolge die Übergangsbedingungen

$$(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) \cdot \mathbf{n}^F = 0 \quad (2.50a)$$

$$(\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) \cdot \mathbf{l}^F = \Delta v_l \quad (2.50b)$$

die kinematische Kopplung beschreiben. Während der Normalenvektor \mathbf{n}^F mit der zeitveränderlichen Geometrie des Randes bezüglich des Fluids festgelegt ist, ist die Fließrichtung

$$\mathbf{l}^F = \frac{\mathbf{v}_l^{\text{rel}}}{\|\mathbf{v}_l^{\text{rel}}\|} \quad (2.51)$$

durch die Projektion der Relativgeschwindigkeiten

$$\mathbf{v}^{\text{rel}} = \mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S \quad (2.52)$$

auf die Kontaktfläche bestimmt, in der der Vektor

$$\mathbf{v}_l^{\text{rel}} = \mathbf{v}^{\text{rel}} - (\mathbf{n}^F \cdot \mathbf{v}^{\text{rel}}) \mathbf{n}^F \quad (2.53)$$

beschrieben ist (vergleiche Abbildung 2.15).

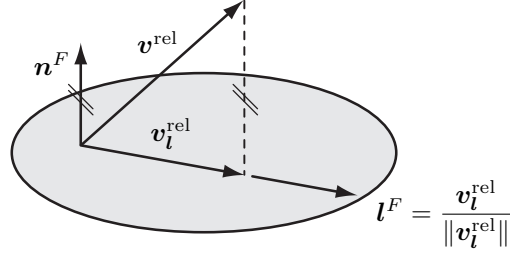


Abbildung 2.15: Fließrichtung

Die Differenzgeschwindigkeit ist implizit mit der Schubspannung

$$t_l = \langle -t_n \rangle \mu_{\text{ef}}(\Delta v_l) \quad (2.54)$$

in Abhängigkeit der Normalspannung t_n und des effektiven Reibungskoeffizienten

$$\mu_{\text{ef}}(\Delta v_l) = \mu (1 - e^{-\alpha \Delta v_l}) \quad (2.55)$$

bestimmt. Er ist neben der Differenzgeschwindigkeit mit den Reibungskoeffizienten μ für Haftreibung und dem Übergangsparameter α bestimmt. Der Einfluss des Übergangsparameters auf den effektiven Reibungskoeffizienten ist mit Abbildung 2.16 dargestellt. Sie zeigt, dass sich der effektive Reibungskoeffizient μ_{ef} umso schneller entwickelt, je größer der Wert des Parameters α ist.

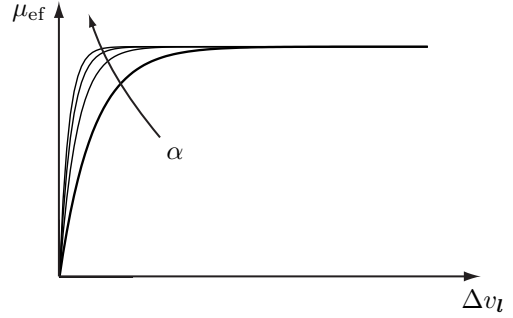


Abbildung 2.16: Reibungskoeffizient

Die Normalspannung und die Schubspannung sind mit den Richtungsvektoren zum Spannungsvektor

$$\mathbf{t}^F = t_l \mathbf{l}^F + t_n \mathbf{n}^F \quad (2.56)$$

zusammengefasst. Er beschreibt die Oberflächenspannungen des Fluids, die nach Gleichung (2.49) in Relation zu den Spannungen der Struktur entlang des gemeinsamen Randes stehen.

Struktur-Struktur-Kopplung

Im Gegensatz zu der Fluid-Struktur-Kopplung ist die Fließrichtung

$$\boldsymbol{t}_0^{S_1} = \frac{\boldsymbol{t}_{0,\parallel}^{S_1}}{t_{0,\parallel}^{S_1}} \quad (2.57)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{t}_{0,\parallel}^{S_1} = \boldsymbol{t}_0^{S_1} - \boldsymbol{t}_{0,\perp}^{S_1} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{t}_{0,\perp}^{S_1} = (\boldsymbol{n}_0^{S_1} \cdot \boldsymbol{t}_0^{S_1}) \boldsymbol{n}_0^{S_1} \quad (2.58)$$

innerhalb der Struktur-Struktur-Kopplung in Abhängigkeit der Oberflächenspannungen bezüglich der Struktur S_1 bestimmt. Damit ist berücksichtigt, dass die Ausgangskonfiguration nicht mehr eindeutig identifiziert werden kann, wenn sich eine Struktur plastisch verformt. Das in diesem Fall der Verformungszustand auch von der Belastungsgeschichte abhängt, verdeutlichen Relativverschiebungen zwischen einem Starrkörper und einer nachgiebigen Struktur. Die nachgiebige Struktur lagert direkt an der dem Starrkörper gegenüberliegenden Fläche (siehe Abbildung 2.18a). Weiterhin unterstellt

$$(\boldsymbol{v}^{S_1} - \boldsymbol{v}^{S_2}) \cdot \boldsymbol{n}_0^{S_1} = \Delta v_n \quad (2.59)$$

einen nachgiebigen Kontakt in Richtung der Flächennormalen, so dass sich die nachgiebige Struktur relativ verschieben und vom Starrkörper ablösen kann. Die nachgiebige Struktur verformt sich infolge einer gleichförmigen Volumenlast, deren Wert durch die in Abbildung 2.17 dargestellte Verlaufsfunktion $f(t)$ angenähert wird.

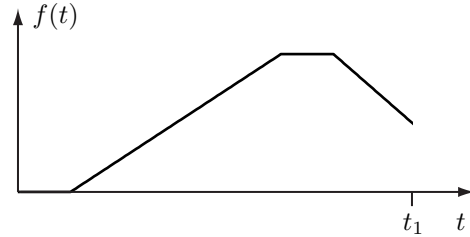
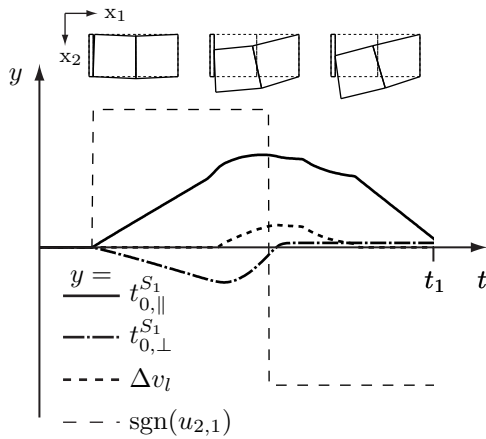
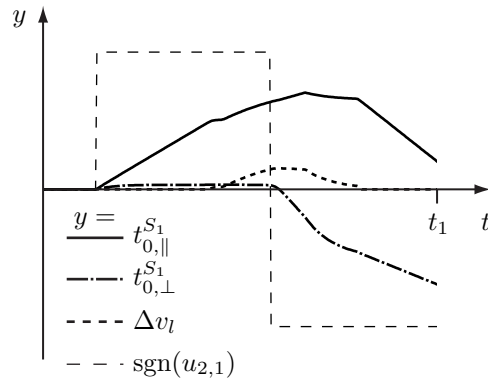


Abbildung 2.17: Verlaufsfunktion



(a) Unterkante



(b) Oberkante

Abbildung 2.18: Zustandsgrößen für $k_{b_l} \rightarrow \infty$

Ist die Haftspannung τ_y überschritten, gleitet die Struktur entlang des Starrkörpers entsprechend der kinematischen Bedingung

$$(\mathbf{v}^{S_1} - \mathbf{v}^{S_2}) \cdot \mathbf{l}_0^{S_1} = \Delta v_l \quad (2.60)$$

mit der Relativgeschwindigkeit

$$\Delta v_l = \frac{\dot{t}_{0,\parallel}^{S_1}}{k_{b_l}} + \left\langle \frac{|t_{\parallel}^{S_1}| - \tau_y}{d} \right\rangle^n \quad (2.61)$$

ab. Abbildung 2.18a zeigt, dass das Vorzeichen der Ableitung $u_{2,1}$ im Verschiebungsfeld mit zunehmender Relativverschiebung wechselt. Dabei ist die Wirkungsrichtung der Reibspannung unverändert, so dass die Relativverschiebungen die Fließrichtung für eine Struktur-Struktur-Kopplung nicht eindeutig festlegen. Nur im speziellen Fall elastischer Relativverschiebungen ($\tau_y \rightarrow \infty$), deren Wert sich mit der Schubspannung $\dot{t}_{0,\parallel}^{S_1}$ und dem Bettungsmodul k_{b_l} berechnet, kann die Fließrichtung im vorliegenden Fall alternativ mit dem Vorzeichen der Ableitung $u_{2,1}$ bestimmt werden. Mit der Steigerung der Last löst sich die nachgiebige Struktur vom Starrkörper in Teilbereichen der Kontaktfläche ab und durchdringt diesen aufgrund des gewählten Ansatzes nach Abbildung 2.19a geringfügig unter der Wirkung von Druckspannungen. Die im Vergleich zu den Druckspannungen geringeren Zugspannungen folgen der Differenzgeschwindigkeit in Richtung der Flächennormalen. Sie ist mit

$$\Delta v_n = f \dot{t}_{0,\perp}^{S_1} \quad (2.62)$$

in Abhängigkeit der Flexibilität

$$f = \frac{(1 + \Delta u_n / l_n)^4}{k_{b_n}} \quad (2.63)$$

und der Rate der Normalspannung $\dot{t}_{0,\perp}^{S_1}$ bestimmt. Die Flexibilität wird aus dem elastischen Potential eines Neo-Hooke-Materials nach Gleichung (3.87) abgeleitet und erhöht sich überproportional mit steigender Differenzverschiebung Δu_n (siehe Abbildung 2.19a).

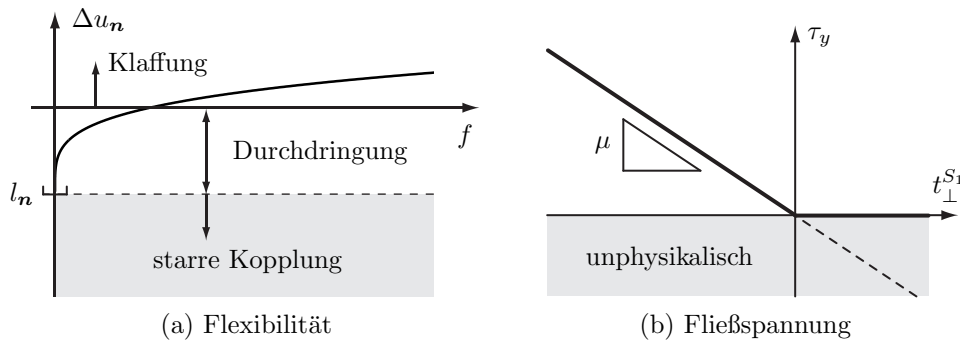


Abbildung 2.19: Flexibilität und Fließspannung

Demgegenüber strebt die Flexibilität im Grenzfall $\Delta u_{\mathbf{n}} \rightarrow l_{\mathbf{n}}$ gegen null, so dass die Strukturen starr gekoppelt sind. Weiterhin beeinflusst der Bettungsmodul $k_{b_{\mathbf{n}}}$ die Flexibilität, der zusammen mit der Länge $l_{\mathbf{n}}$ die Modellparameter der Kopplung normal zu deren Ebene definiert. Die Normalspannung legt zusammen mit dem Reibungskoeffizienten für Haftreibung die Gleitspannung mit

$$\tau_y = \left\langle -\mu t_{\perp}^{S_1} \right\rangle \quad (2.64)$$

fest. Mit Gleichung (2.64) werden Schubspannungen nach plastischen Relativverschiebungen in der statischen Gleichgewichtslage für $k_{b_i} \rightarrow \infty$ nur übertragen, wenn gleichzeitig Druckspannungen wirken (siehe Abbildung 2.19b). Die statische Kopplung zwischen den Gebieten ist Gleichung (2.49) entsprechend mit

$$t_{0,\perp}^{S_1} \mathbf{n}_0^{S_1} + t_{0,\parallel}^{S_1} \mathbf{l}_0^{S_1} = t_{0,\perp}^{S_2} \mathbf{n}_0^{S_1} + t_{0,\parallel}^{S_2} \mathbf{l}_0^{S_1} \quad (2.65)$$

in der Ausgangskonfiguration der Strukturen formuliert.

3 Diskretisierung der Modellgleichungen

Das Prinzip der virtuellen Leistung formuliert eine Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung für Struktur und Fluid einschließlich deren Kopplung. Die abgestimmten Polynomansätze ermöglichen eine numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos. Bevor die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung im Speziellen für die in Kapitel 8.1 formulierten Modellgleichungen angegeben ist, ist deren Methodik im Allgemeinen dargelegt und für eine Bewertung mit einem semi-diskreten Verfahren für die Berechnung einer Näherungslösung verglichen.

3.1 Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode

Die Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode ist die konsistente Erweiterung der von ZIENKIEWICZ [71] u.a. beschriebenen Finite-Elemente-Methode mit einem Zeitintegrationsverfahren nach Galerkin und eignet sich insbesondere für die Lösung der in Raum und Zeit formulierten Impulserhaltung der Strukturmechanik (vergleiche HUGHES und HULBERT [33]). Die Methode setzt das Raum-Zeit-Kontinuum Q eines materiellen Körpers voraus. Das Raum-Zeit-Kontinuum vereinigt das räumliche Gebiet Ω mit dem Zeitbereich I . Es ist von dem Rand P umschlossen, der in den Dirichlet-Rand P^D und den Neumann-Rand P^N mit $P = P^D \cup P^N$ und $P^D \cap P^N = \emptyset$ weiter unterteilt ist.

Mit dem Ziel einer effizienten Methode ist das Raum-Zeit-Kontinuum in eine Folge von Raum-Zeit-Scheiben $Q_n = \Omega_t \times I_n$ mit $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ unterteilt, die jeweils mit vierdimensionalen Elementen unterteilt sind. Die in Abbildung 3.1a dargestellten Raum-Zeit-Scheiben sind sukzessive für sich verändernde Rand- und Übergangsbedingungen diskretisiert, mit denen für $t = t_0$ auch die Anfangsbedingungen der zu lösenden Anfangs-Randwertprobleme berücksichtigt sind. Mit der Unterteilung des Raum-Zeit-Kontinuums in eine Folge von Raum-Zeit-Scheiben ist die Kausalität sichergestellt.

Mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode wird sowohl der räumliche als auch der zeitliche Verlauf der Beschreibungsvariablen mit Polynomansätzen angenähert. Die zeitliche Entwicklung der Beschreibungsvariablen ist hier innerhalb einer jeden Zeitscheibe mit einem linearen Ansatz angenähert. Während die primären Beschreibungsvariablen im Raum stetig approximiert sind, ist die zeitliche Entwicklung aller Beschreibungsvariablen zeit-diskontinuierlich beschrieben und die Übergangsbedingungen einer jeden Zeitscheibe in schwacher Form erfüllt (siehe DELFOUR [20]).

Mit Anwendung des zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens, das nachfolgend auch als ZDG-Verfahren bezeichnet wird, wird diskontinuität der Beschreibungsvariablen z zwischen den Raum-Zeit-Scheiben schwach erfüllt (siehe Abbildung 3.9a). Im Folgenden werden einige wesentliche Eigenschaften des ZDG-Verfahrens für eine Zeitintegration von Anfangswertproblemen dargestellt.

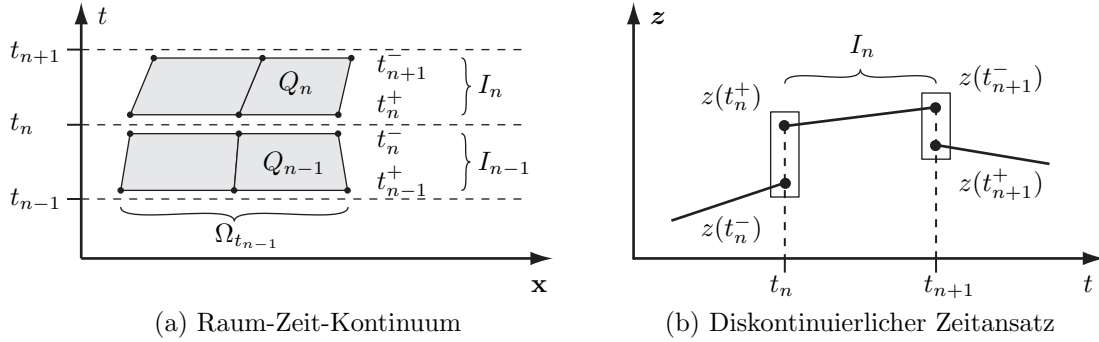


Abbildung 3.1: Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode

3.1.1 Zeitintegration

Die wesentlichen Eigenschaften des ZDG-Verfahrens sind mit dem Amplituden- und Phasenfehler, mit der Stabilität, der Konvergenz und der Entwicklung eines absoluten Fehlers untersucht. In Bezug auf die Effizienz sind nachfolgend neben dem ZDG-Verfahren auch die Eigenschaften des zeit-kontinuierlichen Galerkin-Verfahrens analysiert, dessen Gleichungssystem für die Berechnung einer Näherungslösung im Vergleich mit dem ZDG-Verfahren um die Hälfte reduziert ist. Es ist im Folgenden auch als ZKG-Verfahren bezeichnet. Weiterhin werden die Galerkin-Verfahren mit der generalisiert- α -Methode verglichen, mit der ein Anfangswertproblem zu diskreten Zeitpunkten näherungsweise gelöst ist, bis hin zu einer semidiskreten Formulierung der Modellgleichungen von Strukturen und Fluiden (vergleiche DETTMER [21]).

Die Eigenschaften der verschiedenen Zeitintegrationsverfahren werden am Beispiel der freien Schwingung eines ungedämpften Ein-Masse-Schwingers untersucht (siehe Abbildung 3.2). Die freie Schwingung ist von der Punktmasse m und der Federsteifigkeit k abhängig und mit der Bewegungsgleichung $m\ddot{u} + ku = 0$ für die Verschiebung u beschrieben. Für die Untersuchung der Eigenschaften der Zeitintegrationsverfahren ist die Punktmasse mit $m = 1 \text{ kg}$ und die Federsteifigkeit mit $k = 1 \text{ N/m}$ gesetzt, so dass sich der Ein-Masse-Schwinger mit der Eigenkreisfrequenz von $\omega = \sqrt{k/m} = 1 \text{ s}^{-1}$ bewegt.

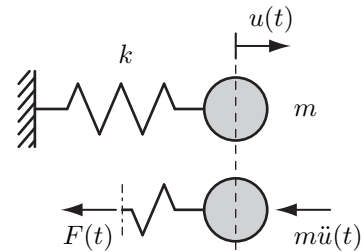


Abbildung 3.2: Ein-Masse-Schwinger

Als Anfangsbedingungen sind Verschiebung und Geschwindigkeit ($v = \dot{u}$) mit $u_0 = 0$ beziehungsweise $v_0 = 1$ m/s definiert, so dass die spezielle Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $u = \sin(\omega t)/\omega$ gegeben ist. Die Bewegungsgleichung unterstellt, dass die Federkraft F proportional zu der Verschiebung u ist und sich linear mit der Federkennlinie $\dot{F} = k v$ in Ratenformulierung entwickelt. Die Bewegung des Ein-Masse-Schwingers ist daher alternativ mit dem Differentialgleichungssystem

$$m \dot{v} + F = 0 \quad (3.1a)$$

$$k^{-1} \dot{F} - v = 0 \quad (3.1b)$$

erster Ordnung beschrieben. Es setzt sich aus der Impulserhaltung in Zeile (3.1a) und der Verformungsbedingung in Zeile (3.1b) zusammen und ist für eine Näherungslösung mit dem ZDG-Verfahren unter Berücksichtigung von Sprungtermen in die schwache Form

$$\int \delta v (m \dot{v} + F) dt + \delta v(t_n^+) m (v(t_n^+) - v(t_n^-)) = 0 \quad (3.2a)$$

$$\int \delta F (k^{-1} \dot{F} - v) dt + \delta F(t_n^+) k^{-1} (F(t_n^+) - F(t_n^-)) = 0 \quad (3.2b)$$

überführt. Mit den Sprungtermen sind die Anfangsbedingung eines jeden Zeitschritts n mit dem zuletzt berechneten Zustand für die Beschreibungsvariablen am Ende des vorangegangenen Zeitintervalls in schwacher Form berücksichtigt. Die schwache Form der Impulserhaltung und der Verformungsbedingung ist mit dem linearen Ansatz für

$$\text{die Geschwindigkeit } v = \frac{(1-\tau)}{2} \hat{v}(t_n^+) + \frac{(1+\tau)}{2} \hat{v}(t_{n+1}^-) \quad (3.3)$$

$$\text{und die Federkraft } F = \frac{(1-\tau)}{2} \hat{F}(t_n^+) + \frac{(1+\tau)}{2} \hat{F}(t_{n+1}^-) \quad (3.4)$$

diskretisiert und einer Lösung für die Freiwerte \hat{v}_i und \hat{F}_i zugänglich gemacht.

$$\text{Die Zeitkoordinate } t = \frac{(1-\tau)}{2} t_n^+ + \frac{(1+\tau)}{2} t_{n+1}^- \quad (3.5)$$

ist in Abhängigkeit der Zeitpunkte zu Beginn t_n^+ und zum Ende t_{n+1}^- des Zeitintervalls mit der lokalen Koordinate τ beschrieben, mit der auch die Formfunktionen für die Beschreibungsvariablen in Gleichung (3.3) und (3.4) formuliert sind. Sie ist im Wertebereich $-1 \leq \tau \leq 1$ definiert. In Abbildung 3.3 ist die Systemantwort für die Geschwindigkeit dargestellt. Der analytischen Lösung ist sowohl eine Lösung nach dem ZDG-Verfahren als auch eine Lösung nach dem ZKG-Verfahren gegenübergestellt. Im Gegensatz zu dem ZDG-Verfahren sind bei dem ZKG-Verfahren die Anfangsbedingungen eines jeden Zeitintervalls in starker Form gesetzt, so dass die Sprungterme in den Gleichungen (3.2a) und (3.2b) entfallen. Damit ist der Verlauf von Geschwindigkeit und Federkraft mit je einem Freiwert innerhalb eines Zeitintervalls beschrieben. Die Näherungslösungen für die Geschwindigkeit lassen erkennen, dass

deren Amplituden im Zeitverlauf abfallen und insbesondere die Näherungslösung nach dem ZKG-Verfahren der analytischen Lösung gegenüber phasenverschoben ist.

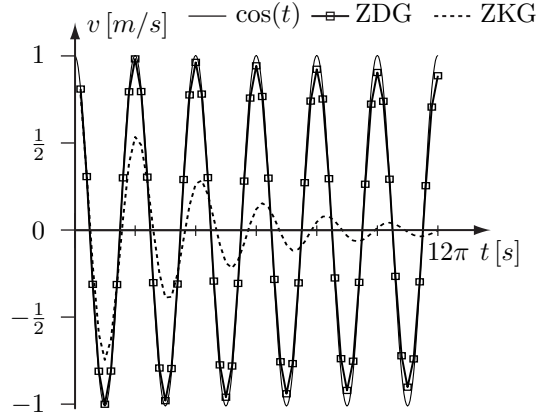


Abbildung 3.3: Systemantwort

Der Amplituden- und Phasenfehler kann mit der Differentialgleichung

$$\dot{v} - \lambda v = 0 \quad (3.6)$$

untersucht werden. Der Koeffizient $\lambda = \delta + i\omega$ ist entsprechend der analytischen Lösung

$$v(t) = v_0 e^{(\delta+i\omega)t} = v_0 e^{\delta t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \quad (3.7)$$

mit dem Abklingkoeffizienten δ und der Eigenkreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ in Abhängigkeit der Periodendauer T einer Schwingung definiert.

Sowohl die Galerkin-Verfahren als auch die generalisiert- α -Methode zählen zu der Klasse der Einschrittverfahren. Mit einem Einschrittverfahren ist der Geschwindigkeitsverlauf sukzessive mit

$$\hat{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{U} \hat{\mathbf{v}}_n \quad (3.8)$$

berechnet, so dass mit der Übertragungsmatrix \mathbf{U} der Amplituden- und Phasenfehler eines Zeitintegrationsverfahrens festgelegt sind. Im Folgenden werden sowohl die Übertragungsmatrizen der Galerkin-Verfahren als auch die Übertragungsmatrix der generalisiert- α -Methode untersucht. Die Differentialgleichung (3.6) ist nach Galerkin [20] mit

$$\int \delta v (\dot{v} - \lambda v) dt + \delta v(t_n^+) (v(t_n^+) - v(t_n^-)) = 0 \quad (3.9)$$

in schwacher Form beschrieben und führt mit den linearen Ansätzen nach Gleichung (3.3) und (3.5) zusammen mit der Beschleunigung $\dot{v} = (\hat{v}(t_{n+1}^-) - \hat{v}(t_n^+))/\Delta t$ und der Zeitschrittweite $\Delta t = t_{n+1}^- - t_n^+$ auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{3} + 1 & \frac{1}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{6} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{6} & \frac{1}{2} - \frac{\lambda \Delta t}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}(t_n^+) \\ \hat{v}(t_{n+1}^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{v}(t_n^-) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Mit der Umformung des Gleichungssystems bezüglich des Freiwertes $\hat{v}(t_{n+1}^-)$ ist die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{U} = \frac{2(3 + \Delta t \lambda)}{6 - 4\Delta t \lambda + \Delta t^2 \lambda^2} \quad (3.11)$$

des zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens gegeben. Mit demselben Schema ist die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{U} = \frac{3 + \Delta t \lambda}{3 - 2\Delta t \lambda} \quad (3.12)$$

des zeit-kontinuierlichen Galerkin-Verfahrens bestimmt. Beide Übertragungsmatrizen lassen sich im vorliegenden Fall mit dem Eigenwert

$$\lambda_h(\Delta t, \lambda) = \delta_h + i \omega_h \quad (3.13)$$

darstellen, mit deren Realteil δ_h und Imaginärteil ω_h der Fehler infolge der Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \arctan(\omega_h/\delta_h)$ und der Amplitudenfehler als spektraler Radius $\varrho = \sqrt{\delta_h^2 + \omega_h^2}$ eines Zeitintegrationsverfahrens definiert sind. Der Zusammenhang mit der Übertragungsmatrix ist mit der analytischen Lösung nach Gleichung (3.7) gegeben, wenn sie mit

$$v(t_{n+1}) = \underbrace{v_0 e^{(\delta + i\omega)t_n}}_{v(t_n)} (\delta + i\omega) \Delta t + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{v^m(t_n)}{m!} \Delta t^m \quad (3.14)$$

in eine Taylor-Reihe um den Zeitpunkt t_n entwickelt ist. Mit dem spektralen Radius ist auch die Stabilität des Zeitintegrationsverfahrens beschrieben. Dazu ist der Koeffizient $\lambda = i$ gesetzt, so dass das Verfahren für $\varrho = 1$ grenzstabil und für $\varrho < 1$ absolut stabil ist. In beiden Fällen ist damit sichergestellt, dass die analytische Lösung der Differentialgleichung

$$v(t) = v_0 (\cos(t) + i \sin(t)) \quad (3.15)$$

amplitudenerhaltend beziehungsweise gedämpft abgebildet ist und die Näherungslösung im Zeitverlauf nicht über alle Grenzen anwächst.

Mit der generalisiert- α -Methode nach CHUNG und HULBERT [14] [35] wird die Differentialgleichung (3.6)

$$\text{mit} \quad \dot{v} = (1 - \alpha_m) \dot{v}_n + \alpha_m \dot{v}_{n+1}, \quad (3.16a)$$

$$v = (1 - \alpha_f) v_n + \alpha_f v_{n+1} \quad (3.16b)$$

$$\text{und } v_{n+1} = v_n + \Delta t ((1 - \gamma) \dot{v}_n + \gamma \dot{v}_{n+1}) \quad (3.16c)$$

an den Kollokationspunkten

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \varrho_\infty} \quad , \quad \alpha_m = \frac{3 - \varrho_\infty}{2(1 + \varrho_\infty)} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m - \alpha_f \quad (3.17)$$

in Abhängigkeit des spektralen Radius ρ_∞ für $\Delta t \rightarrow \infty$ näherungsweise gelöst. Der spektrale Radius ist im Wertebereich $0 \leq \varrho_\infty \leq 1$ definiert. Die Näherungslösung

$$\begin{bmatrix} v_{n+1} \\ \Delta t \dot{v}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} v_n \\ \Delta t \dot{v}_n \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $n + 1$ ist nach der generalisiert- α -Methode neben der Geschwindigkeit im Allgemeinen auch von deren Ableitung zu Beginn eines jeden Zeitschrittes abhängig, so dass die Übertragungsmatrix

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\alpha_m - \alpha_f \gamma \lambda \Delta t} \begin{bmatrix} \alpha_m - (\alpha_f - 1) \gamma \lambda \Delta t & \alpha_m - \gamma \\ \lambda \Delta t & \alpha_m - 1 + \alpha_f \lambda \Delta t (1 - \gamma) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

als 2×2 Matrix gegeben ist. Der spektrale Radius

$$\varrho = \max (|\lambda_h^i(\mathbf{U})|) \quad (3.20)$$

ist mit den Eigenwerten λ_h^i der Übertragungsmatrix bestimmt. Der betragsmäßig größte Eigenwert ist in Abhängigkeit der Zeitschrittweite Δt definiert (siehe BATHE [4]), und ist ein Maß für den Amplitudenfehler.

Der Verlauf des bestimmenden Eigenwertes ist sowohl für die Galerkin-Verfahren als auch für unterschiedliche Parameter ϱ_∞ der generalisiert- α -Methode mit Abbildung 3.4 in der komplexen Zahlenebene dargestellt. Er ist mit der auf die Periodendauer T einer Schwingung normierten Zeitschrittweite als Bogenkoordinate bestimmt. Den Verläufen ist zu entnehmen, dass alle Verfahren harmonische Schwingungen phasenverschoben abbilden.

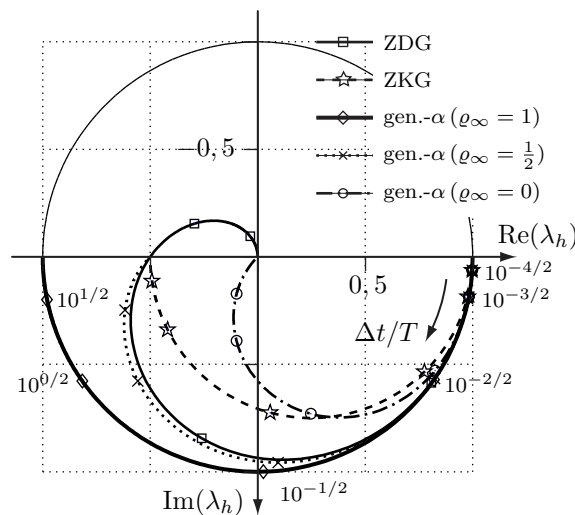


Abbildung 3.4: Eigenwerte

Im Bezug auf die numerische Dämpfung der Amplitude einer Schwingung sind dem spektralen Radius nach nur mit der generalisiert- α -Methode für $\varrho_\infty = 1$ harmonische

Schwingungen amplitudenerhaltend abgebildet. Für $\varrho_\infty < 1$ nimmt die numerische Dämpfung bis hin zu $\varrho_\infty = 0$ stetig zu. Während bei der generalisiert- α -Methode die Höhe der numerischen Dämpfung mit dem Parameter ϱ_∞ gezielt gesteuert werden kann, ist sie bei den Galerkin-Verfahren mit der Approximation der Beschreibungsvariablen festgelegt. Im Vergleich der Galerkin-Verfahren entwickelt sich nur der spektrale Radius des ZDG-Verfahrens im Grenzfalle $\Delta t \rightarrow \infty$ gegen $\rho = 0$, während das ZKG-Verfahren Schwingungen höherer Frequenzen nur begrenzt filtert. Mit der Bedingung, dass für $\omega \rightarrow \infty$ eine Schwingung mit dem Zeitintegrationsverfahren vollständig gefiltert sein soll, zeigt der Vergleich der Eigenwerte, dass das ZDG-Verfahren gegenüber der generalisiert- α -Methode Schwingungen niedriger Frequenzen weniger stark filtert. Für eine Beurteilung der Filtereigenschaft der verschiedenen Zeitintegrationsverfahren sind die spektralen Radien alternativ in ϱ - Δt - Diagrammen dargestellt (siehe Abbildung 3.5).

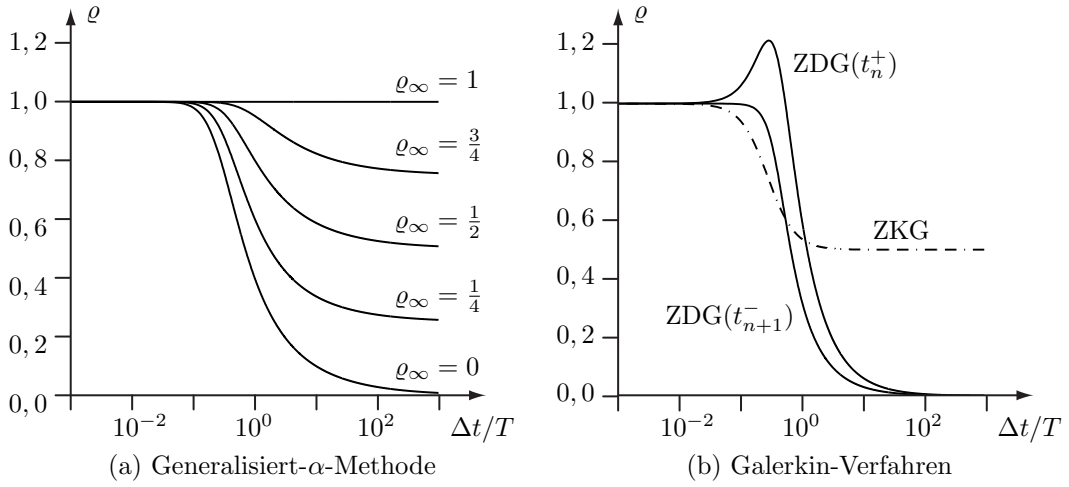


Abbildung 3.5: Spektrale Radien

Der Parameter ϱ_∞ beeinflusst die Güte des Filters der generalisiert- α -Methode. Die Verläufe in Abbildung 3.5a zeigen, dass die spektralen Radien mit zunehmendem Verhältnis $\Delta t/T$ langsam abfallen. Der im Bezug auf $\hat{v}(t_{n+1}^-)$ größere Gradient im spektralen Radius des ZDG-Verfahrens belegt, dass dessen Filter im Vergleich zu denen der generalisiert- α -Methode von höherer Güte ist (siehe Abbildung 3.5b). Der Verlauf der spektralen Radien der Galerkin-Verfahren zeigt, dass das ZDG-Verfahren bezüglich des Freiwertes $\hat{v}(t_n^+)$ zunächst nahezu grenzstabil, mit zunehmender Zeitschrittweite und einem maximalen Wert von $\rho = 1,2$ instabil ist, bevor es sich anschließend als absolut stabiles Verfahren darstellt. Wenn auch das in Bereichen instabile Verhalten bei der Interpretation von Näherungslösungen zu berücksichtigen ist, so ist das ZDG-Verfahren bezüglich $\hat{v}(t_{n+1}^-)$ stets absolut stabil.

Eine Konvergenzstudie untersucht die Genauigkeit der Zeitintegrationsverfahren. Abbildung 3.6 zeigt, dass die Näherungslösung nach dem ZKG-Verfahren mit einer Konvergenz erster Ordnung gegen die analytische Lösung strebt. Hingegen ist sowohl das ZDG-Verfahren als auch die generalisiert- α -Methode von zweiter Ordnung genau. Während die Konvergenzordnung des ZDG-Verfahrens und der generalisiert-

α -Methode mit $p = 2$ identisch ist, ist der Fehler in der jeweiligen Näherungslösung unterschiedlich. So nimmt selbst innerhalb der generalisiert- α -Methode der Fehler in der Näherungslösung mit abnehmendem spektralen Radius zu. Diskrete Werte des Fehlers sind in Abhängigkeit des Verfahrens und der Zeitschrittweite alternativ in Tabelle 3.1 zusammengestellt. Die Zahlenwerte zeigen, dass die Zeitschrittweite mehr als zu vierteln ist, wenn die Näherungslösung mit der generalisiert- α -Methode und $\varrho_\infty = 0$ berechnet ist und von gleicher Güte sein soll wie die Näherungslösung nach dem ZDG-Verfahren. Selbst bei $\varrho_\infty = 1$ erfordert die generalisiert- α -Methode eine mehr als halbierte Zeitschrittweite, wenn die analytische Lösung gleichwertig angenähert sein soll. Die hohe Genauigkeit des ZDG-Verfahrens zeigt sich insbesondere beim Vergleich der Fehler beider Galerkin-Verfahren.

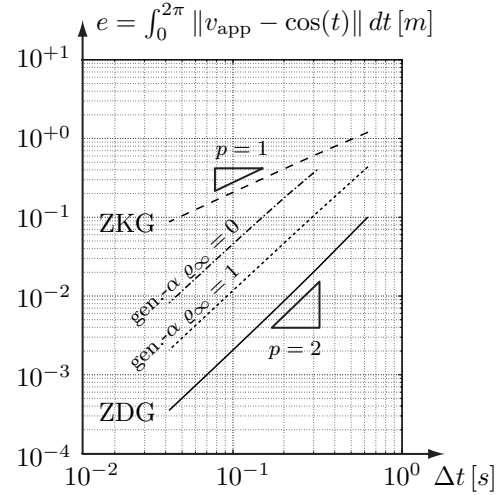


Abbildung 3.6: Konvergenzen

	Fehler $e = \int_0^{2\pi} \ v_{\text{app}} - \cos(t)\ dt$ in m und in Abhängigkeit der Zeitschrittweite Δt			
Zeitintegrationsverfahren	$2\pi/10 s$	$2\pi/20 s$	$2\pi/40 s$	$2\pi/80 s$
ZKG-Verfahren (lineare App.)	1,20118	0,63311	0,32371	0,16332
gen.- α -Methode ($\varrho_\infty = 0$)	1,18069	0,39945	0,11043	0,02841
gen.- α -Methode ($\varrho_\infty = 1$)	0,43795	0,11434	0,02886	0,00723
ZDG-Verfahren (lineare App.)	0,10065	0,02226	0,00520	0,00125

Tabelle 3.1: Absolute Fehler

Während der Fehler nur noch bei einem Wert von $e \approx 0,101 m$ liegt, wenn die Näherungslösung mit dem ZDG-Verfahren und einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 2\pi/10 s$ berechnet ist, so ist der Fehler immer noch mit einem Wert von $e \approx 0,163 m$ beschrieben, wenn die Näherungslösung mit dem ZKG-Verfahren und einem Achtel der Zeitschrittweite berechnet ist. Es ist jedoch zu beachten, dass die erforderliche Zeit für die direkte Lösung eines Gleichungssystems mit dessen Dimension überproportional steigt, so dass die Effizienz des ZDG-Verfahrens gegenüber anderen Verfahren mit der hohen Anzahl von Freiwerten eines räumlichen Modells abfallen kann.

Für die Berechnung randgekoppelter Mehrfeldprobleme mit freien Oberflächen zwischen den Teilgebieten kann nach FRIES [27] auch die *extended finite element method* (XFEM) [25] mit einem Kollokationsverfahren in der Zeit erweitert werden. Konvergenzstudien zeigen, dass sich aufgrund zeitveränderlicher Ansatzräume die Näherungslösung im Allgemeinen zuerst verlangsamt gegen die analytische Lösung strebt bis ein reduzierter Konvergenzradius erreicht ist. Das sich verändernde Konvergenzverhalten ist mit dem gegenüber der Wichtung veränderten Ansatzraum be-

gründet, in dem die Beschreibungsvariablen definiert sind. Mit dem besseren Konvergenzverhalten der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode wird ein semidiskretes Verfahren für eine Näherungslösung der Modellgleichungen nicht weiter verfolgt.

Neben der Bewegung von freien Oberflächen ist das ZDG-Verfahren im besonderen Maße für die numerische Analyse von dünnwandigen Schalen geeignet, deren Stabilität sich mit der Ausbildung von Beulen verringert. Die Beulen entwickeln sich mit angefachten Kriechbewegungen, die mit Gleichung (3.7) für reelle und positive Koeffizienten $\lambda = \delta$ beschrieben sind. In Abbildung 3.7 sind Linien im Feld des spektralen Radius dargestellt, das von der Zeitschrittweite und dem Koeffizienten $\lambda \in \mathbb{R}$ im reellen Raum aufgespannt ist. Während die Linien im Fall der generalisiert- α -Methode mit Polstellen diskutiert sind, liegt der spektrale Radius des ZDG-Verfahrens in einem endlichen Wertebereich. Damit stellt das ZDG-Verfahren sicher, dass eine Näherungslösung nicht über alle Grenzen anwachsen kann.

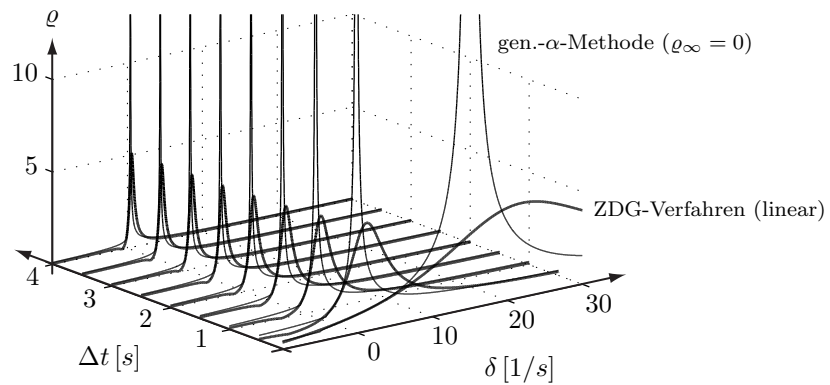


Abbildung 3.7: Spektrale Radien im reellen Raum

3.2 Modellgleichungen in globaler Form

Die Diskretisierung der Modellgleichungen der Struktur, des Fluids und deren Kopplung ist aufeinander folgend dargestellt. Für eine Diskretisierung wird zunächst das mechanische Verhalten der Struktur mit der globalen Form der Impulserhaltung nach Gleichung (2.1) und dem Prinzip der virtuellen Leistung beschrieben.

3.2.1 Struktur

Dem Lagrange-Formalismus folgend wird das Verformungsverhalten der Struktur mit einer Arbeitsgleichung beschrieben. Sie ist für sich plastisch verfestigende Materiale konsistent mit einem Galerkin-Verfahren erweitert, mit dem die Evolutionsgleichungen (2.24a) und (2.24b) in schwacher Form formuliert sind. Mit Lagrange-Ansätzen für die Geschwindigkeiten und abgestimmten Ansätzen für die Spannungen wird die Arbeitsgleichung diskretisiert. Für die numerische Analyse von

dünnwandigen Schalen werden neben einer linearen Approximation der Geschwindigkeiten auch abgestimmte Spannungsansätze für eine quadratische Approximation der Geschwindigkeiten vorgestellt. Die Bedeutung von quadratischen Lagrange-Ansätzen für die Beschreibung des Verformungsverhaltens von dünnwandigen Schalen ist mit Finite-Elemente-Modellen aufgezeigt, deren Verformungen von der analytischen Lösung der Modellgleichungen des gekrümmten Bernoulli-Balkens bestätigt werden. Einleitend ist zuvor die Güte der vorgestellten Elemente mit ausgewählten Modellen der Strukturmechanik untersucht.

3.2.1.1 Arbeitsgleichung

Die Arbeitsgleichung

$$\begin{aligned} & \int \delta \mathbf{v} \cdot \left(\rho_0 \dot{\mathbf{v}} - \nabla_0 \cdot \mathbf{P} - \rho_0 \mathbf{g} \right) dQ_0 \\ & + \int \delta \mathbf{S} : \left(\dot{\mathbf{E}}_{\text{el}} - \dot{\mathbf{E}} \right) dQ_0 + Ab + Rb = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

beschreibt, dem Prinzip der virtuellen Leistung folgend, das Verformungsverhalten von elastischen Strukturen. Die Anfangsbedingungen Ab und Randbedingungen Rb sind der jeweiligen Struktur entsprechend zu definieren. Die Arbeitsgleichung beschreibt die lokale Form der Impulserhaltung mit virtuellen Geschwindigkeiten und die Bilanz der Verzerrungsgeschwindigkeiten leistungskonform mit virtuellen Spannungen in schwacher Form. Mit dem ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und den Raum-Zeit-Integralen der Ausgangskonfiguration ist die Arbeitsgleichung in der total Lagrangeschen Betrachtungsweise formuliert (vergleiche Kapitel 2.1). Die partielle Integration des Arbeitsterms

$$- \int \delta \mathbf{v} \cdot \nabla_0 \cdot (\mathbf{F} \mathbf{S}) dQ_0 = \int \nabla_0 \delta \mathbf{v} : (\mathbf{F} \mathbf{S}) dQ_0 - \int \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_0 dP_0 \quad (3.22)$$

zeigt, dass mit

$$\int \nabla_0 \delta \mathbf{v} : (\mathbf{F} \mathbf{S}) dQ_0 = \int \text{sym}(\mathbf{F}^T \nabla_0 \delta \mathbf{v}) : \mathbf{S} dQ_0 = \int \delta \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{S} dQ_0 \quad (3.23)$$

die Arbeiten der zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen leistungskonform mit den virtuellen Verzerrungsgeschwindigkeiten formuliert werden können. Mit Gleichung (3.23) ist die Symmetrie des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors berücksichtigt und unterstellt, dass der virtuelle Zustand die Kinematik erfüllt. Die Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen sind mit

$$\int \delta \mathbf{t}_0 \cdot (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) dP_0^D \quad (3.24)$$

und

$$\int \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{t}_0 - \bar{\mathbf{t}}_0) dP_0^N \quad (3.25)$$

in schwacher Form beschrieben.

Mit der partiellen Integration nach Gleichung (3.22) und deren Umformung nach Gleichung (3.23) ist die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung für die Berechnung von Zustandsänderungen innerhalb einer Zeitscheibe mit

$$\int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \dot{\mathbf{v}} dQ_0 + \int_{Q_{0,n}} \dot{\mathbf{E}}(\delta \mathbf{v}, \mathbf{u}) : \mathbf{S} dQ_0 - \int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \rho_0 \mathbf{g} dQ_0 \quad (3.26a)$$

$$- \int_{P_{0,n}^N} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 dP_0^N \quad (3.26b)$$

$$+ \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot \rho_0 (\mathbf{v}(t_n^+) - \mathbf{v}(t_n^-)) d\Omega_0 \quad (3.26c)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \delta \mathbf{S} : (\mathbb{C}^{-1} : \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v}, \mathbf{u})) dQ_0 \quad (3.26d)$$

$$+ \sum_e \int_{\Omega_0^e} \delta \mathbf{S}(t_n^+) : \mathbb{C}^{-1} : (\mathbf{S}(t_n^+) - \mathbf{S}(t_n^-)) d\Omega_0 = 0 \quad (3.26e)$$

gegeben. Mit der Zwei-Feld-Formulierung ist die Werkstoffgleichung (2.15) in starker Form erfüllt. Weiterhin wird unterstellt, dass sowohl der virtuelle als auch der reelle Geschwindigkeitszustand die Kinematik erfüllt. Mit dem Arbeitsintegral in Zeile (3.26b) ist die Neumann-Randbedingung erfasst. Dabei ist berücksichtigt, dass sich der erste Term des Integrals in Gleichung (3.25) auf dem Neumann-Rand mit dem Randintegral in Gleichung (3.22) aufhebt und dessen verbleibender Anteil auf dem Dirichlet-Rand nicht auszuwerten ist, wenn der virtuelle Geschwindigkeitszustand die Kinematik nicht nur im Raum-Zeit-Gebiet, sondern auch auf dessen Rand erfüllt. Sobald der virtuelle Geschwindigkeitszustand die Kinematik auf dem Rand erfüllt, ist mit dem Arbeitssatz auch gefordert, dass mit

$$\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

die Dirichlet-Randbedingung mit den Ansätzen für die Geschwindigkeiten in starker Form erfüllt ist. Die Summation über die Elemente in Zeile (3.26d) verdeutlicht, dass mit der partiellen Integration nach Gleichung (3.22) der Spannungszustand über die Elemente hinweg nicht stetig beschrieben sein muss. Mit den Sprungtermen für die Geschwindigkeiten und die Spannungen in Zeile (3.26c) und (3.26e) sind die Übergangsbedingungen zwischen den Zeitscheiben formuliert und für

$$\mathbf{v}(t_0^-) - \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{S}(t_0^-) - \mathbf{S}_0 = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

die Anfangsbedingungen mit der Arbeitsgleichung in schwacher Form beschrieben. Mit den Übergangsbedingungen ist sichergestellt, dass sowohl die kinetische Energie als auch die Verformungsenergie im Zeitbereich, über das gesamte räumliche Gebiet betrachtet, übertragen ist. Sobald das gesamte Raum-Zeit-Gebiet als energetisch offen betrachtet wird, ist die übertragene Formänderungsenergie auch im Fall viskoplastischer Verzerrungen allein mit den elastischen Verzerrungen beschrieben. Für die Beschreibung des Verformungsverhaltens von Strukturen mit elastisch-viskoplastischem Materialverhalten ist die Arbeitsgleichung in Zeile (3.26d) mit dem Arbeitsterm

$$\int_{Q_{0,n}^e} \delta \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{vp} dQ_0 \quad (3.29)$$

additiv erweitert und damit unterstellt, dass die Verzerrungen klein sind. In diesem Fall sind die Cauchy-Spannungen in der eingesetzten Werkstoffgleichung (2.17) identisch mit den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen beschrieben. Dabei ist beachtet, dass die viskoplastische Vergleichsdehnrate des verwendeten Werkstoffmodells keine unabhängige Beschreibungsvariable darstellt, sondern nach Gleichung (2.18) neben der isotropen und der kinematischen Verfestigung mit dem Spannungszustand festgelegt ist (vergleiche KNIPPERS [39]). Die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung zeigt, dass die Arbeitsgleichung (3.21) mit der partiellen Integration nach Gleichung (3.22) auf ein Galerkin-Verfahren zurückgeführt werden kann, mit dem die Differentialgleichung (2.10) der Impulserhaltung zusammen mit der Bilanz der Verzerrungsgeschwindigkeiten nach Gleichung (2.14) in schwacher Form formuliert sind. So kann man die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung nach Gleichung (3.26) mit den schwachen Formen

$$\begin{aligned} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \delta w \left(\dot{\chi} - b_\chi (q_\chi - \chi) \dot{\lambda} \right) dt \\ + \delta w(t_n^+) (\chi(t_n^+) - \chi(t_n^-)) = 0 \quad \text{und} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \delta \mathbf{W} : \left(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - b_\alpha \left(\frac{2}{3} q_\alpha \frac{\partial \Psi_{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\alpha} \right) \dot{\lambda} \right) dt \\ + \delta \mathbf{W}(t_n^+) : (\boldsymbol{\alpha}(t_n^+) - \boldsymbol{\alpha}(t_n^-)) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

konsistent erweitern. Mit den Gleichungen (3.30) und (3.31) sind die Evolutionsgleichungen (2.24a) und (2.24b) der isotropen beziehungsweise kinematischen Verfestigung mit zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren für die materiellen Punkte einer Struktur in schwacher Form gegeben. Im Bezug auf die Untersuchung der Stabilität von metallischen Kreiszylinderschalen ist sowohl mit dem elastischen Potential nach Gleichung (2.11) als auch mit der additiven Erweiterung der Bilanz der Verzerrungsgeschwindigkeiten unterstellt, dass sich bei Instabilitäten große Rotationen mit kleinen Verzerrungen einstellen. Die Berücksichtigung großer Rotationen erfordert nach Gleichung (2.9) die Beschreibung von Verschiebungen, die neben der Arbeitsgleichung mit

$$\mathbf{u} = \int_{t=t_0} \mathbf{v} dt \quad (3.32)$$

in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten bestimmt sind. Mit Gleichung (3.32) ist unterstellt, dass die Verschiebungen zum Zeitpunkt $t = t_0$ identisch null sind. Wird eine Struktur schlagartig mit einem Impuls beansprucht, breitet sich die Störung mit Scher- und Kompressionswellen aus. Bei einer Kompressionswelle ist das Material lokal verdichtet, bis hin zu einem Sprung im Geschwindigkeitsfeld entlang der

Verdichtungsfront. Dies führt bei einer Approximation des Geschwindigkeitsfeldes mit Polynomfunktionen im Allgemeinen zu Oszillationen im Lösungsverlauf. Kompressionswellen breiten sich auch aus, wenn sich Strukturen beim Beulen lokal und schlagartig verformen. Für die Untersuchung der Stabilität von Kreiszylinderschalen wird die Arbeitsgleichung (3.26) mit der Bubnov-Galerkin-Stabilisierung

$$\sum_e \int_{Q_{0,n}^e} \delta \dot{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\kappa}^S \cdot \mathcal{L}_1^S dQ_0 \quad (3.33)$$

auf Grundlage der lokalen Form der Impulserhaltung erweitert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Kompressionswellen wird in elastischen Strukturen mit

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda_L + 2\mu_L}{\rho}} \quad (3.34)$$

bestimmt. Mit der gegenüber Scherwellen erhöhten Geschwindigkeit von Kompressionswellen sind nur die Komponenten

$$\kappa_{ii}^S = 1 / \sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2c_P}{\Delta x_i}\right)^2} \quad (3.35)$$

des Stabilisierungstensors $\boldsymbol{\kappa}^S$ mit Werten größer null belegt (vergleiche HUGHES und HULBERT [33]). Der Term $c_P/\Delta x_i$ berücksichtigt, wie viele Elemente der gemittelten Länge Δx_i von einer Kompressionswelle innerhalb einer Sekunde durchlaufen werden.

Neben der Bubnov-Galerkin-Stabilisierung ist die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung mit

$$d_0 \int_{Q_{0,n}} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dQ_0 \quad (3.36)$$

um eine masseproportionale Strukturdämpfung in Abhängigkeit der Viskosität d_0 als weiterer Modellparameter erweitert. Eine elastische Lagerung der Struktur ist in Abhängigkeit des Bettungsmoduls k_b mit der Cauchy-Bedingung $\mathbf{t}_0 = -k_b (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}_0$ entlang des Neumann-Randes formuliert. Mit der Cauchy-Bedingung ist die Wirkungsrichtung der Bettung mit dem Normalenvektor \mathbf{n}_0 beschrieben, der zugleich die Basis des Vektors der Oberflächenspannung definiert. Sie ergänzt in schwacher Form mit

$$\int_{dP_{0,n}^N} \delta \mathbf{v} \cdot (k_b (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}_0) dP_0^N \quad (3.37)$$

die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung nach Gleichung (3.26).

3.2.1.2 Ansätze

Das Raum-Zeit-Gebiet ist mit vierdimensionalen Elementen aufgespannt, deren Referenzelement mit der geometrischen Form eines Tesserakt beschrieben ist. Der Tesserakt ist mit den lokalen Koordinaten der Referenzkonfiguration ξ_i und τ in Abbildung 3.8 dargestellt und vereinigt zwei Würfel zu den lokalen Zeiten $\tau = -1$ und $\tau = 1$ bis hin zu einem geschlossenen geometrischen Körper.

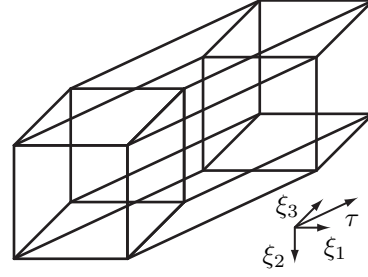
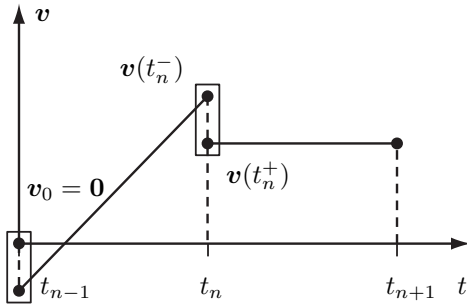


Abbildung 3.8: Tesserakt

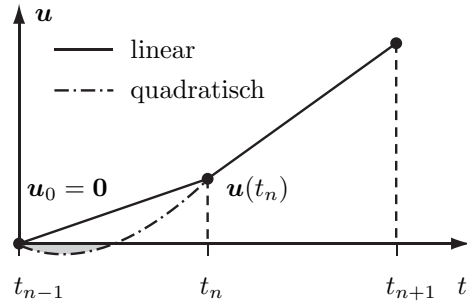
Mit der total Lagrangeschen Betrachtungsweise ist die Geometrie der Elemente in der Zeit konstant. Die Entwicklung der Geschwindigkeiten und Spannungen ist mit dem linearen Ansatz

$$z = \frac{1}{2} (1 - \tau) z(t_n^+) + \frac{1}{2} (1 + \tau) z(t_{n+1}^-) \quad (3.38)$$

für die Beschreibungsvariable z innerhalb einer Zeitscheibe angenähert. Abweichend von der zeit-diskontinuierlichen Approximation der Geschwindigkeiten sind die Verschiebungen auch im Zeitbereich kontinuierlich beschrieben (siehe Abbildung 3.9).



(a) Zeit-diskontinuierliche Geschwindigkeit



(b) Zeit-kontinuierliche Verschiebung

Abbildung 3.9: Zeitverläufe der Bewegungsgrößen

So sind die Verschiebungen $\mathbf{u}(t_n^+)$ zu Beginn des aktuellen Zeitintervalls mit den Verschiebungen $\mathbf{u}(t_{n+1}^-)$ zum Ende der vorangegangenen Zeitintervalls festgelegt. Folglich sind die aktuellen Verschiebungen innerhalb einer Zeitscheibe mit

$$\mathbf{u}(t_n^+ \leq t \leq t_{n+1}^-) = \mathbf{u}(t_n^+) + \int_{t_n^+}^{t \leq t_{n+1}^-} \mathbf{v} dt. \quad (3.39)$$

bestimmt. Mit der Arbeitsgleichung (3.21) ist der Impuls nur über das Raum-Zeit-Gebiet erhalten. Aus diesem Grund ist der Verlauf der Verschiebungen mit den Werten zum Ende eines jeden Zeitintervalls optimal angenähert. Des Weiteren ist mit

$$\begin{aligned}
\int_{t_n^+}^{t \leq t_{n+1}^-} \mathbf{v} dt &= \int_{-1}^{\tau \leq 1} \left(\frac{1}{2}(1 - \tau) \mathbf{v}(t_n^+) + \frac{1}{2}(1 + \tau) \mathbf{v}(t_{n+1}^-) \right) \frac{\Delta t}{2} d\tau \\
&\approx \frac{1}{2} (\tau + 1) (\mathbf{v}(t_n^+) + \mathbf{v}(t_{n+1}^-)) \frac{\Delta t}{2}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

abweichend von einer quadratischen Entwicklung der Verschiebungen deren Verlauf linear beschrieben (siehe Abbildung 3.9b). Unterschiedlich angenähert und nachfolgend im Detail dargestellt ist die räumliche Approximation der Geschwindigkeiten und Spannungen. Dem isoparametrischen Konzept folgend sind sowohl die Geometrie der Elemente als auch die Geschwindigkeiten als primäre Beschreibungsvariablen alternativ mit linearen und quadratischen Lagrange-Ansätzen beschrieben. Formuliert im lokalen Koordinatensystem sind die Formfunktionen

$$\sum_{k_e=1}^8 N_{\text{lin}}^{k_e} = \frac{1}{8} (1 + \xi_1^{k_e} \xi_1) (1 + \xi_2^{k_e} \xi_2) (1 + \xi_3^{k_e} \xi_3) \tag{3.41}$$

des linearen Ansatzes mit den Koordinaten $\xi_i^{k_e} \pm 1$ der Eckknoten k_e des Referenzelementes als Lagrange-Polynome definiert. Der Verlauf der Spannungen ist hingegen mit mathematischen Ansätzen lokal in den Elementen formuliert. Im Referenzelement ist mit den Ansätzen

$$\begin{aligned}
S_{11}^{\text{lin}} &= \hat{s}_1 + \hat{s}_2 \xi_2 + \hat{s}_3 \xi_3 + \hat{s}_4 \xi_2 \xi_3, \\
S_{22}^{\text{lin}} &= \hat{s}_5 + \hat{s}_6 \xi_1 + \hat{s}_7 \xi_3 + \hat{s}_8 \xi_1 \xi_3, \\
S_{33}^{\text{lin}} &= \hat{s}_9 + \hat{s}_{10} \xi_1 + \hat{s}_{11} \xi_2 + \hat{s}_{12} \xi_1 \xi_2, \\
S_{12}^{\text{lin}} &= \hat{s}_{13} + \hat{s}_{14} \xi_3, \\
S_{13}^{\text{lin}} &= \hat{s}_{15} + \hat{s}_{16} \xi_2 \quad \text{und} \\
S_{23}^{\text{lin}} &= \hat{s}_{17} + \hat{s}_{18} \xi_1
\end{aligned} \tag{3.42}$$

das Spannungsfeld auf ein trilinear angenähertes Geschwindigkeitsfeld abgestimmt. Im Bezug auf ein trilineares Geschwindigkeitsfeld ist das Spannungsfeld mit 18 Freiwerten äquivalent zum Verschiebungsfeld beschrieben. Dies ist erfüllt, wenn die Anzahl der Spannungsfreiwerte mit $\sum \hat{s} = \sum \hat{v} - 6$ der um die Starrkörperbewegungen reduzierten Anzahl an Geschwindigkeitsfreiwerten entspricht. Neben der Anzahl an Spannungsfreiwerten sind die Monome auf den Ansatz für das Geschwindigkeitsfeld derart abgestimmt, dass jede mögliche Veränderung in den Verzerrungen entsprechend dem Werkstoffmodell auf einen Spannungszustand abgebildet werden kann. Während der Ansatz für die Normalspannungen mit $S_{ii} \propto v_{i,i}$ dem global in Richtung i abgeleiteten Ansatz für die Geschwindigkeit v_i entspricht, sind die Schubspannungen mit einem reduzierten Ansatz in Anlehnung an das von PIAN [51] entwickelte Scheibenelement beschrieben. Die Ansätze für die Normalspannungen sind entsprechend dem elastischen Potential nach Gleichung (2.11) für $\nu = 0$ auf die Ansätze für die Geschwindigkeiten abgestimmt, so dass zusammen mit den reduzierten Ansätzen für die Schubspannungen die Flexibilität elastischer Strukturen im

Allgemeinen überschätzt wird. Mit dem Ansatz nach Gleichung (3.42) ist das Spannungsfeld im Referenzelement nach Abbildung 3.8 divergenzfrei beschrieben. Damit ist das Verformungsverhalten von Strukturen nach Gleichung (3.21) optimal angenähert, wenn die Geschwindigkeiten mit trilinearen Ansätzen formuliert und die Elemente entlang der Achsen des globalen Koordinatensystems ausgerichtet sind. Mit dem Ziel eines verbesserten Lösungsverhaltens gedreht und verzerrt im Raum liegender Elemente ist der lokal formulierte Spannungszustand mit der Jakobimatrix $\mathbf{J}_e = \nabla_{\xi} \mathbf{x}_0$ des jeweiligen Elementes auf das globale Koordinatensystem mit

$$\mathbf{S}^{\text{glob}} = \mathbf{J}_e^T \mathbf{S}^{\text{loc}} \mathbf{J}_e \quad (3.43)$$

abgebildet. Dabei ist die Jakobimatrix für eine konstante Abbildungsvorschrift stets in Elementmitte bei $\xi_i = 0$ ausgewertet, so dass der Grad der Polynome, mit denen die Normalspannungen angenähert sind, sich nicht infolge einer veränderlichen Jakobimatrix hin zu nicht abgestimmten Ansätzen erhöht. In Bezug auf die Geometrie von Schalen ist deren Krümmung im Fall linearer Lagrange-Ansätze erst mit dem Aufbau der Systemmatrix indirekt erfasst. Demgegenüber ist mit quadratischen Lagrange-Ansätzen die Krümmung bereits im Element ausgewertet. Mit dem Ziel die Anzahl von erforderlichen Freiwerten im Gleichungssystem so gering wie möglich zu halten, sind sowohl die Geometrie als auch die Geschwindigkeiten mit dem reduziert symmetrischen und quadratischen Ansatz der Serendipity-Klasse beschrieben (vergleiche ZIENKIEWICZ [71]). Die Monome des reduziert symmetrischen und quadratischen Ansatzes sind für ein Referenzelement in geometrischer Form eines Quadrates mit einem Auszug aus dem Pascalschen Dreieck in Abbildung 3.10 angegeben. Sie führen im dreidimensionalen Raum auf einen Lagrange-Ansatz mit 20 Freiwerten, dessen Formfunktionen

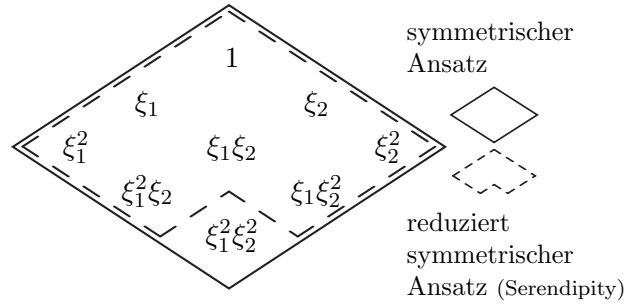


Abbildung 3.10: Pascalsches Dreieck

$$\sum_{k_e=1}^8 N_{\text{quad20}}^{k_e} = N_{\text{lin}}^{k_e} (\xi_1^{k_e} \xi_1 + \xi_2^{k_e} \xi_2 + \xi_3^{k_e} \xi_3 - 2) \quad \text{und} \quad (3.44)$$

$$\sum_{k_s=1}^{12} N_{\text{quad20}}^{k_s} = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2^{k_s} \xi_2)(1 + \xi_3^{k_s} \xi_3) & \text{für } \xi_1^{k_s} = 0 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_2^2)(1 + \xi_1^{k_s} \xi_1)(1 + \xi_3^{k_s} \xi_3) & \text{für } \xi_2^{k_s} = 0 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_3^2)(1 + \xi_1^{k_s} \xi_1)(1 + \xi_2^{k_s} \xi_2) & \text{für } \xi_3^{k_s} = 0 \end{cases}$$

neben den Eckknoten auch mit den Elementkoordinaten der Seitenmittenknoten k_s definiert sind. Ist der Verlauf der Geschwindigkeiten im Raum mit den Ansätzen nach Gleichung (3.44) beschrieben, ist der Spannungszustand mit

$$\begin{aligned}
S_{11}^{\text{quad20}} &= S_{11}^{\text{lin}} + \hat{s}_{19} \xi_1 + \hat{s}_{20} \xi_2^2 + \hat{s}_{21} \xi_3^2 + \hat{s}_{22} \xi_1 \xi_2 \\
&\quad + \hat{s}_{23} \xi_1 \xi_3 + \hat{s}_{24} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \hat{s}_{25} \xi_2^2 \xi_3 + \hat{s}_{26} \xi_3^2 \xi_2, \\
S_{22}^{\text{quad20}} &= S_{22}^{\text{lin}} + \hat{s}_{27} \xi_2 + \hat{s}_{28} \xi_1^2 + \hat{s}_{29} \xi_3^2 + \hat{s}_{30} \xi_1 \xi_2 \\
&\quad + \hat{s}_{31} \xi_2 \xi_3 + \hat{s}_{32} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \hat{s}_{33} \xi_1^2 \xi_3 + \hat{s}_{34} \xi_3^2 \xi_1, \\
S_{33}^{\text{quad20}} &= S_{33}^{\text{lin}} + \hat{s}_{35} \xi_3 + \hat{s}_{36} \xi_1^2 + \hat{s}_{37} \xi_2^2 + \hat{s}_{38} \xi_1 \xi_3 \\
&\quad + \hat{s}_{39} \xi_2 \xi_3 + \hat{s}_{40} \xi_1 \xi_2 \xi_3 + \hat{s}_{41} \xi_1^2 \xi_2 + \hat{s}_{42} \xi_2^2 \xi_1, \\
S_{12}^{\text{quad20}} &= S_{12}^{\text{lin}} + \hat{s}_{43} \xi_1 + \hat{s}_{44} \xi_2 + \hat{s}_{45} \xi_1 \xi_3 + \hat{s}_{46} \xi_2 \xi_3, \\
S_{13}^{\text{quad20}} &= S_{13}^{\text{lin}} + \hat{s}_{47} \xi_1 + \hat{s}_{48} \xi_3 + \hat{s}_{49} \xi_1 \xi_2 + \hat{s}_{50} \xi_2 \xi_3 \quad \text{und} \\
S_{23}^{\text{quad20}} &= S_{23}^{\text{lin}} + \hat{s}_{51} \xi_2 + \hat{s}_{52} \xi_3 + \hat{s}_{53} \xi_1 \xi_2 + \hat{s}_{54} \xi_1 \xi_3
\end{aligned} \tag{3.45}$$

im Referenzelement abgestimmt. Während die Ansätze für die Spannungen unter den zuvor benannten Bedingungen bereits im Fall des reduziert symmetrischen und quadratischen Ansatzes nach Gleichung (3.44) nicht eindeutig bestimmt sind, sind mehr Möglichkeiten gegeben, einen statisch bestimmten Ansatz im Bezug auf den symmetrischen und quadratischen Lagrange-Ansatz zu formulieren, dessen Formfunktionen mit

$$\begin{aligned}
\sum_{k_e=1}^8 N_{\text{quad27}}^{k_e} &= \frac{1}{8} \xi_1 \xi_2 \xi_3 (\xi_1 + \xi_1^{k_e}) (\xi_2 + \xi_2^{k_e}) (\xi_3 + \xi_3^{k_e}), \\
\sum_{k_s=1}^{12} N_{\text{quad27}}^{k_s} &= \begin{cases} \frac{1}{4} \xi_2 \xi_3 (1 - \xi_1^2) (\xi_2 + \xi_2^{k_s}) (\xi_3 + \xi_3^{k_s}) & \text{für } \xi_1^{k_s} = 0 \\ \frac{1}{4} \xi_1 \xi_3 (1 - \xi_2^2) (\xi_1 + \xi_1^{k_s}) (\xi_3 + \xi_3^{k_s}) & \text{für } \xi_2^{k_s} = 0 \\ \frac{1}{4} \xi_1 \xi_2 (1 - \xi_3^2) (\xi_1 + \xi_1^{k_s}) (\xi_2 + \xi_2^{k_s}) & \text{für } \xi_3^{k_s} = 0, \end{cases} \\
\sum_{k_a=1}^6 N_{\text{quad27}}^{k_a} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 + \xi_1^{k_a}) (1 - \xi_2^2) (1 - \xi_3^2) & \text{für } \xi_2^{k_a} = \xi_3^{k_a} = 0 \\ \frac{1}{2} \xi_2 (\xi_2 + \xi_2^{k_a}) (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_3^2) & \text{für } \xi_1^{k_a} = \xi_3^{k_a} = 0 \\ \frac{1}{2} \xi_3 (\xi_3 + \xi_3^{k_a}) (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) & \text{für } \xi_1^{k_a} = \xi_2^{k_a} = 0 \end{cases} \\
\text{und } N_{\text{quad27}}^{k_v} &= (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) (1 - \xi_3^2)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

angegeben sind. Aus diesem Grund sind die Verläufe der Spannungen in erster Näherung auch mit Gleichung (3.46) beschrieben und Gleichung (3.44) um Formfunktionen erweitert, deren Freiwerte an den Flächenmittenknoten k_a und an dem Knoten k_v im Zentrum des Referenzelementes definiert sind. Damit sind die Verläufe der Spannungen entsprechend den Verläufen in weggrößenbasierten finiten Elementen angenähert.

Die Linearisierung der Residuen r_i der Arbeitsgleichung (3.26) nach den unbekannten Geschwindigkeitsfreiwerten \hat{v}_i und Spannungsfreiwerten \hat{s}_i führt auf die Elementmatrix \mathbf{K}_e . Sie setzt sich entsprechend den zugeordneten Freiwerten aus den Untermatrizen $\mathbf{K}_{\delta\mathbf{v}\mathbf{v}}$, $\mathbf{K}_{\delta\mathbf{v}\mathbf{s}}$, $\mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{v}}$ und $\mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{s}}$ zusammen und bildet auf Elementebene

das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\delta\mathbf{v}\mathbf{v}} & \mathbf{K}_{\delta\mathbf{v}\mathbf{s}} \\ \mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{v}} & \mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{v}} \\ \Delta\hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\delta\mathbf{v}} \\ \mathbf{r}_{\delta\mathbf{s}} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Für eine Reduktion der Freiheitsgrade auf Systemebene sind die Spannungsfreiwerte in Gleichung (3.47) statisch kondensiert. Die statische Kondensation führt zu dem reduzierten Gleichungssystem

$$\left[\mathbf{K}_{\delta\mathbf{v}\mathbf{v}} - \mathbf{K}_{\delta\mathbf{v}\mathbf{s}} \mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{v}} \right] \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\delta\mathbf{v}} - \mathbf{K}_{\delta\mathbf{v}\mathbf{s}} \mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{s}}^{-1} \mathbf{r}_{\delta\mathbf{s}} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

gemischt-hybrider Elemente, deren Elementmatrix die Bedeutung einer Steifigkeitsmatrix zugeordnet werden kann. Die Zuwüchse in den Spannungsfreiwerten sind nach der Lösung des Gleichungssystems für die Geschwindigkeitsfreiwerte in deren Abhängigkeit mit

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{s}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\delta\mathbf{s}} - \mathbf{K}_{\delta\mathbf{s}\mathbf{v}} \Delta\hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

in einer Nachlaufrechnung bestimmt. Es ist darauf hingewiesen, dass mit der statischen Kondensation nur die Anzahl der Freiwerte im Gleichungssystem reduziert ist. Das Lösungsverhalten der Elemente ist mit der statischen Kondensation nicht beeinflusst. So sind die Eigenwerte des Eigenwertproblems bezüglich der Elementmatrix eines gemischt-hybriden Elementes in den Eigenwerten eines äquivalenten gemischten Elementes enthalten.

Isotrope Verfestigung am materiellen Punkt

Das Lösungsverhalten des zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens ist für sich verändernde Typen von Differentialgleichungen mit der isotopen Verfestigung eines materiellen Punktes unter zyklischer Beanspruchung nach Abbildung 3.11a untersucht. Der materielle Punkt beginnt sich bei Erreichen der Fließspannung von $\sigma_y = 7 \text{ N/m}^2$ mit einer Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Viskosität $d = 100 \text{ Ns/m}^2$ für einen Spannungsexponenten von $n = 1$ isotrop zu verfestigen. Die maximale isotope Verfestigung ist mit dem Sättigungswert $q_\chi = 5 \text{ N/m}^2$ festgelegt und entwickelt sich mit $b_\chi = 2$.

Während sich die Evolutionsgleichung bei den gegebenen Modellparametern zunächst auf eine Erhaltungsgleichung reduziert, wandelt sie sich zum Zeitpunkt $t = 1,4 \text{ s}$ in eine Entwicklungsgleichung für die isotrope Verfestigung, so dass die analytische Lösung unter anderem Knicke im Verlauf zeigt. Mit einem linearen Polynomansatz können Knicke im Verlauf der Verfestigung jedoch nicht abgebildet werden. So ist für das ZDG-Verfahren untersucht, in wieweit sich ein bereichsweise stetiger Ansatz für die Approximation von Verfestigungen eignet.

In Abbildung 3.11b ist die Näherungslösung für die Verfestigung nach dem ZDG-Verfahren für eine Zeitschrittweite von $\Delta t = 2 \text{ s}$ mit den Verläufen für die Freiwerte $\chi(t_n^-)$ und $\chi(t_n^+)$ dargestellt (vergleiche Abbildung 3.9a). Das der Freiwert $\chi(t_n^-)$ im ersten Zeitschritt einen negativen Werte annimmt, ist mit dem Zeitpunkt begründet, ab dem sich der materielle Punkt plastisch verzerrt. Auch im zweiten Zeitschritt ist der Wert noch negativ, obwohl sich der Typ der Differentialgleichung im Zeitbereich $2 \text{ s} < t < 4 \text{ s}$ nicht ändert. Nimmt der Freiwert $\chi(t_n^-)$ in den ersten zwei Zeitschritten auch negative Werte an, so beschreiben die stets positiven Werte für $\chi(t_n^+)$ eine physikalisch sinnvolle Entwicklung der Verfestigung. Nachdem die Näherungslösung ihrem Verlauf nach beschrieben ist, ist deren Güte im Vergleich mit Näherungslösungen nach der generalisiert- α -Methode für $\varrho_\infty = 1$ bewertet (siehe Kapitel 3.1.1).

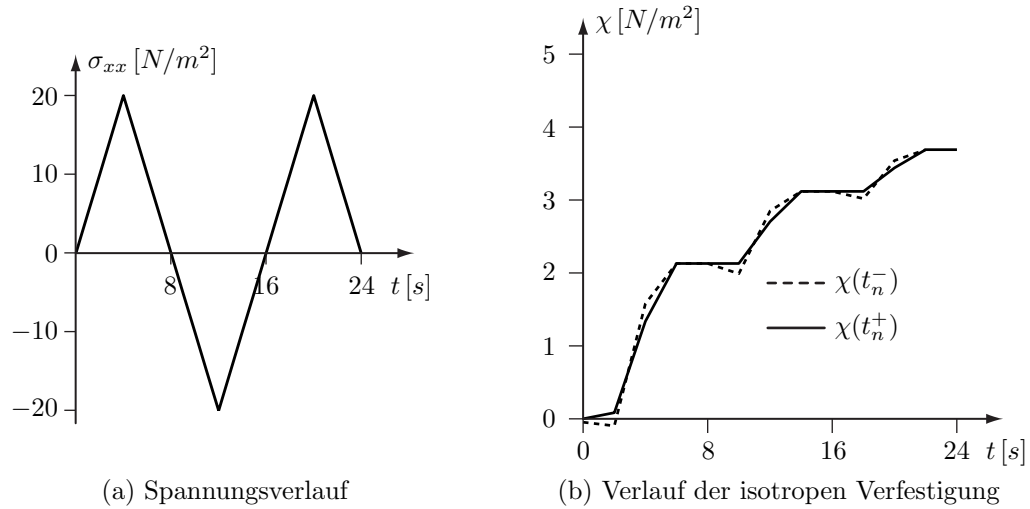


Abbildung 3.11: Zustandsgrößen am materiellen Punkt

Die in Tabelle 3.2 zusammengestellten Zahlenwerte lassen erkennen, dass mit beiden Verfahren die Verfestigung zum Zeitpunkt $t = 4 \text{ s}$ nahezu gleichwertig angenähert ist. Damit ist gezeigt, dass auch der schwach diskontinuierliche Verlauf von Verfestigungen mit einem linearen Polynomansatz innerhalb des ZDG-Verfahrens angenähert werden kann.

Zeitintegration	Zeitschrittweite Δt					
	2 s	1 s	1/2 s	1/4 s	1/8 s	1/32 s
generalisiert- α -Methode	1, 2829	1, 3174	1, 3412	1, 3416	1, 3430	1, 3431
ZDG-Verfahren	1, 3349	1, 3459	1, 3416	1, 3434	1, 3430	1, 3431

Tabelle 3.2: Näherungslösungen für die Verfestigung zum Zeitpunkt $t = 4 \text{ s}$

3.2.1.3 Elementeigenschaften

Kragarm unter reiner Biegung

Schließt der kegelförmige Auslaufrichter eines Silos direkt an den zylindrischen Schaft des Silos an, verbiegt sich die Siloschale im Übergangsbereich bereits bei rotationssymmetrischen Beanspruchungen. Vereinfachend wird daher zunächst die Qualität des Elementes bei Biegung an einem Kragarm untersucht. Mit dem in Abbildung 3.12 dargestellten Modell ist der für eine Querdehnzahl von $\nu = 0,25$ zwangsfrei gelagerte Kragarm am freien Ende mit einer linear veränderlichen Randspannung biegebeansprucht (siehe Abbildung 3.12).

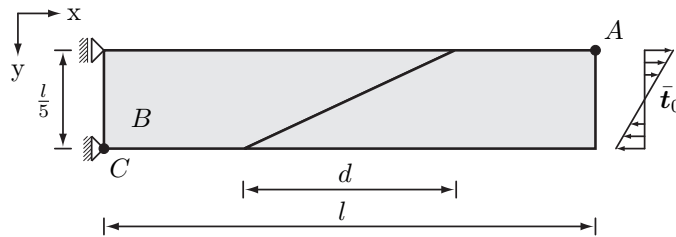


Abbildung 3.12: Strukturmodell

Neben der Verschiebung u_y des materiellen Punktes A ist das Lösungsverhalten auch mit der Spannung S_{xx} an dem dem materiellen Punkt C nächstgelegenen Integrationspunkt B bewertet. Die Jacobimatrix der Elemente ist mit der Verzerrung d/l veränderlich, so dass als Folge der Verzerrung der Verschiebungszustand entlang der Ober- und Unterseite des Kragarms unterschiedlich angenähert ist und der Ansatz für die Spannungen auch im Fall einer linearen Approximation der Geschwindigkeiten nicht mehr divergenzfrei ist. Dies führt bei zunehmender Verzerrung zu einer höher werdenden Abweichung der Näherungslösung gegenüber der Referenzlösung, die mit den Modellgleichungen des Bernoulli-Balkens bestimmt ist (siehe Abbildung 3.13).

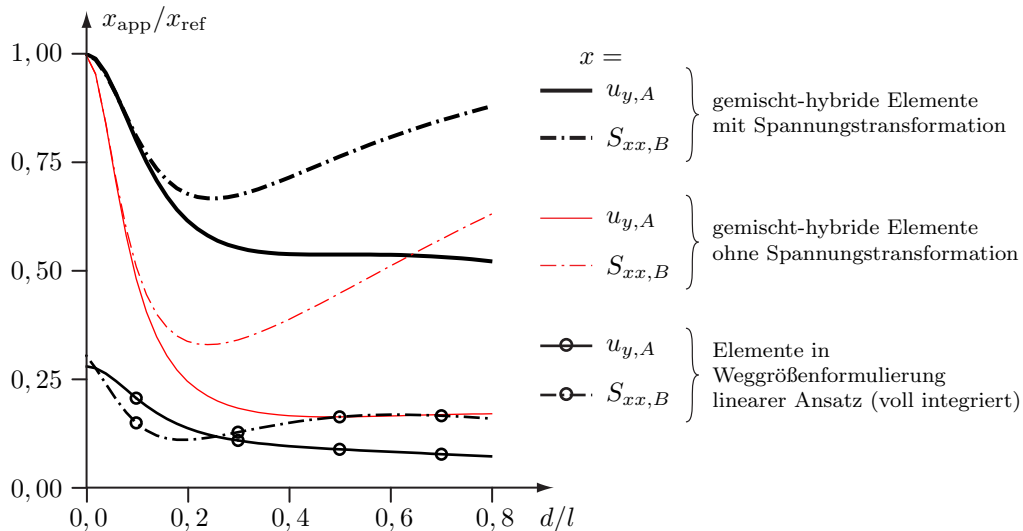


Abbildung 3.13: Lineare Approximation

Mit zunehmender Verzerrung zeigt sich der Einfluss der Transformation der lokal definierten Spannungsansätze in das globale Koordinatensystem. Mit der Transformation nach Gleichung (3.43) ist die Güte der Näherungslösung für die Normalspannung und die Verschiebung an den ausgezeichneten materiellen Punkten wesentlich verbessert (vergleiche PIAN [51]). Die Güte der Näherungslösungen, die mit gemischt-hybriden Elementen bestimmt sind, zeigt sich im Vergleich mit den Näherungslösungen, die mit Elementen berechnet sind, mit denen die Arbeitsgleichung

$$\int_{\Omega_{0,n}} \delta \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) : \frac{\partial \Psi_{\text{el}}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{E}} d\Omega_0 - \int_{\Omega_{0,n}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \mathbf{g} d\Omega_0 \quad (3.50a)$$

$$- \int_{\Gamma_{0,n}^N} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 d\Gamma_0^N = 0 \quad (3.50b)$$

in Weggrößenformulierung umgesetzt ist. Während die Verschiebung des materiellen Punktes A mit unverzerrten gemischt-hybriden Elementen im Rahmen der Ansätze exakt abgebildet ist, ist die Steifigkeit des Kragarms mit Weggrößenelementen überschätzt, so dass deren Verschiebungen deutlich von der Referenzlösung abweichen. Die geringe Verschiebung von weggrößenbasierten Elementen erklärt das Phänomen des Schublockings, das mit den reduzierten Ansätzen für die Schubspannungen nach Gleichung (3.42) in gemischt-hybriden Elementen unterbunden ist. Es sei darauf hingewiesen, dass alle Näherungslösungen für eine vollständige Integration der Arbeitsgleichung bestimmt sind und das Lösungsverhalten von weggrößenbasierten Elementen mit der Methode der selektiv reduzierten Integration verbessert werden kann. Weniger deutlich zeigt sich der Einfluss der Spannungstransformation im Fall reduziert quadratischer Ansätze für die Geschwindigkeiten nach Gleichung (3.44). Wie Abbildung 3.14 zu entnehmen ist, weicht bereits die Verschiebungslösung für $d/l = 0,8$ nur um $\approx 2,5\%$ von der Referenzlösung ab, wenn die lokal definierten Spannungen ohne zusätzliche Transformation auf das globale Koordinatensystem abgebildet sind.

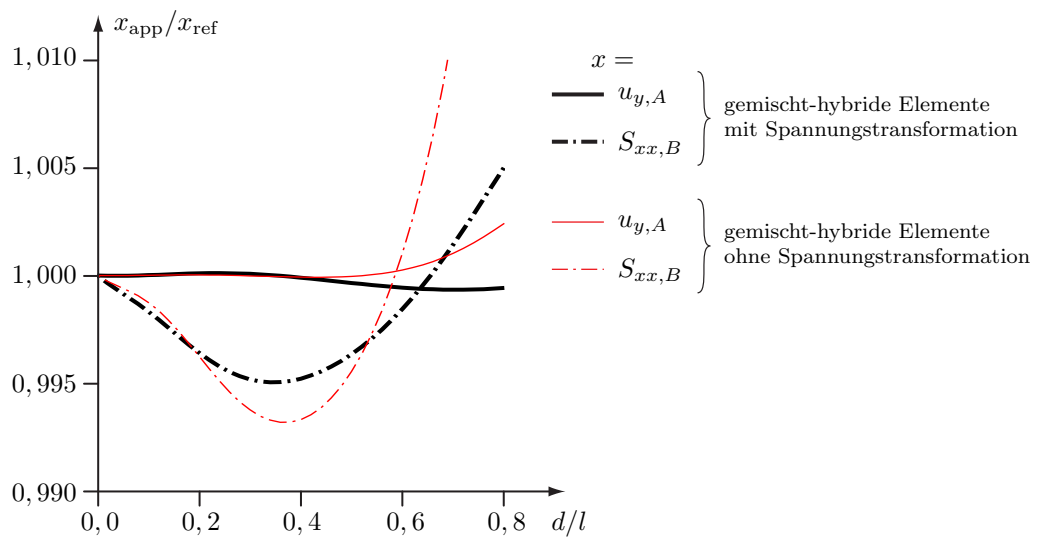


Abbildung 3.14: Quadratische Approximation - gemischte Formulierung

Bei der Bewertung der Verläufe ist zu beachten, dass mit der gegebenen Biegebeanspruchung der Spannungszustand im vorliegenden Strukturmodell konstant ist. Wenn auch der Einfluss bei quadratischen Lagrange-Ansätzen für die Geschwindigkeiten geringer ist, so sind für den allgemeinen Fall eines veränderlichen Spannungszustandes auch die Spannungen nach Gleichung (3.45) transformiert. Die in Abbildung 3.15 dargestellten Verläufe zeigen, dass das Lösungsverhalten von Weggrößenelementen im Bezug auf Biegeverformungen dem Lösungsverhalten der gemischt-hybriden Element entspricht, wenn die Verschiebungen mit einem symmetrischen und quadratischen Lagrange-Ansatz nach Gleichung (3.46) approximiert werden.

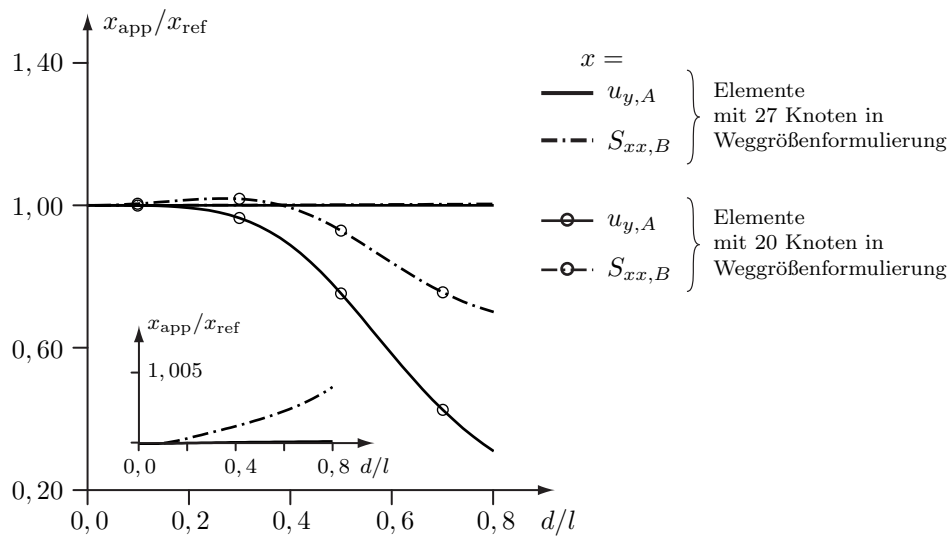


Abbildung 3.15: Quadratische Approximation - Weggrößenformulierung

Inkompressible Kreisringscheibe mit Innendruck

Dem Lösungsverhalten von Elementen kommt bei volumetrischen Verzerrungen eine besondere Bedeutung zu, wenn diese nahezu volumenkonstant sind. In Bezug auf die Modellgleichungen des Silos verformen sich Elemente nahezu volumenkonstant, wenn die plastischen Verzerrungen über die elastischen Anteile überwiegen und die Fließrichtung mit der Fließbedingung nach von Mises definiert ist (siehe Gleichung (2.6)). Mit dem Sachverhalt, dass das Materialverhalten einer Struktur für den Grenzfall $\nu \rightarrow 0,5$ inkompressibel ist, wird das Lösungsverhalten exemplarisch für eine Kreisringscheibe untersucht, die sich infolge des Innendrucks p mit

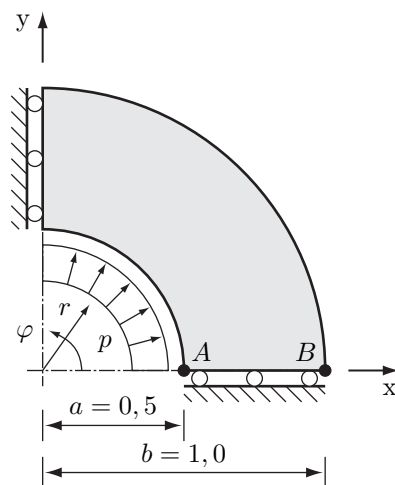


Abbildung 3.16: Kreistringscheibe

$\nu = 0,49999$ nahezu volumenkonstant verformt. Für das in Abbildung 3.16 dargestellte Modell formuliert BALKE [3] mit den Konstanten

$$C_1 = \frac{\frac{a^2}{b^2} p}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{a^2 p}{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

die analytische Lösung

$$u_r = \frac{r}{E} (S_{\varphi\varphi} - \nu(S_{rr} + S_{zz})) \quad (3.51)$$

für die Modellgleichungen des ebenen Verzerrungszustandes in Abhängigkeit der Querdehnzahl und des Spannungszustandes, der mit

$$S_{rr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad , \quad S_{\varphi\varphi} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad \text{und} \quad S_{zz} = 2\nu C_1$$

beschrieben ist. Der räumliche Verlauf, der auf den Innendruck normierten Normalspannung S_{xx}/p , ist in Abhängigkeit der Formulierung der Modellgleichungen und der Approximation der Verschiebungen in Abbildung 3.17 dargestellt. Während der Verlauf ausgeprägten Oszillationen unterworfen ist, wenn er mit Elementen für eine Weggrößenformulierung der Modellgleichungen berechnet ist, bilden gemischt-hybride Elemente sowohl bei linearen als auch quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen den Spannungsverlauf oszillationsfrei ab, wenn deren Spannungszustand mit Gleichung (3.42) beziehungsweise (3.45) abgestimmt ist.

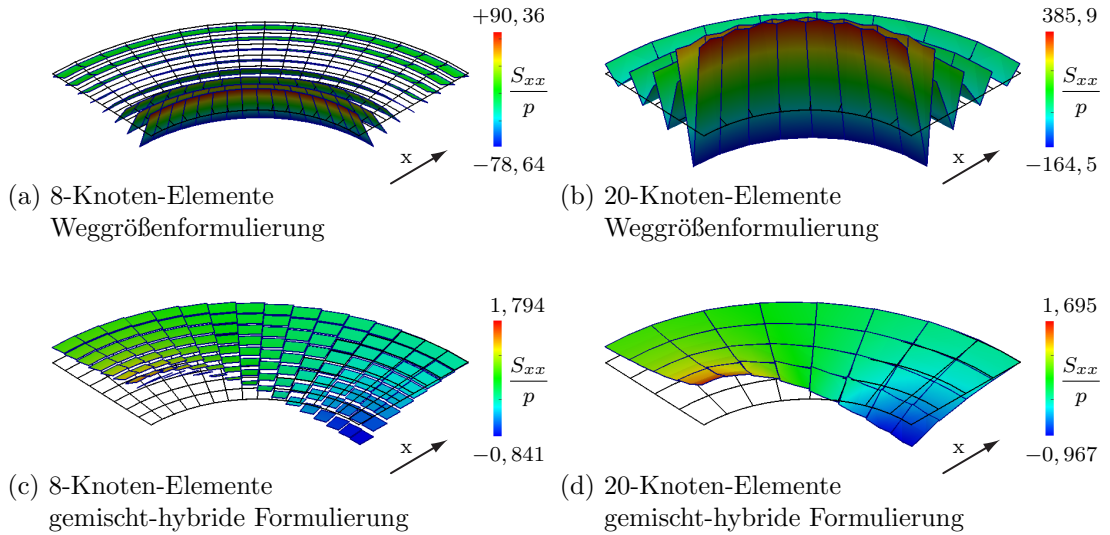


Abbildung 3.17: Verlauf der normierten Normalspannung

Die analytische Lösung für die radiale Verschiebung des unbeanspruchten Randes ist mit $u_r = 0,5 p/E$ gegeben und mit den Zahlenwerten in Tabelle 3.3 bestätigt. Sie zeigen, dass die Steifigkeit der Scheibe deutlich überschätzt ist, wenn sie mit Elementen für eine Weggrößenformulierung der Modellgleichungen angenähert ist.

Elemente	Formulierung	Netz	Verschiebung $u_x _B$
Hex8	Weggrößen	16×8	0,012088 p/E
Hex20	Weggrößen	8×4	0,252047 p/E
Hex8	gemischt-hybrid	16×8	0,498396 p/E
Hex20	gemischt-hybrid	8×4	0,500264 p/E

Tabelle 3.3: Randverschiebung

Das Lösungsverhalten der Elemente wird für $\nu \rightarrow 0,5$ bezüglich der Steifigkeit mit der Verteilung der Eigenwerte des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{K}_e - k_i \mathbf{I}) \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

nachfolgend untersucht. Das Eigenwertproblem ist mit den Eigenwerten k_i und den Eigenformen $\hat{\mathbf{u}}_i$ für die Elementmatrix \mathbf{K}_e formuliert. Im Fall der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung beschreibt die Elementmatrix nach Gleichung (3.48) neben dem Raum zugleich die zeitliche Entwicklung der Beschreibungsvariablen, so dass die Eigenwerte nicht unmittelbar als Steifigkeit interpretiert werden können. Aus diesem Grund sind für eine Beurteilung des räumlichen Lösungsverhaltens gemischt-hybrider Elemente die Eigenwerte für die gleichartig diskretisierte Arbeitsgleichung

$$\int_{\Omega_{0,n}} \delta \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{u}) : \mathbf{S} d\Omega_0 - \int_{\Omega_{0,n}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho_0 \mathbf{g} d\Omega_0 - \int_{\Gamma_{0,n}^N} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 d\Gamma_0^N \quad (3.53a)$$

$$+ \sum_e \int_{\Omega_{0,n}^e} \delta \mathbf{S} : (\mathbb{C}^{-1} : \mathbf{S} - \mathbf{E}(\mathbf{u})) d\Omega_0 = 0 \quad (3.53b)$$

bestimmt. Die Verteilung der Eigenwerte ist für würfelförmige Elemente mit einer Seitenlänge von $2m$ berechnet, deren Verschiebungen mit linearen Polynomen beschrieben sind. Sie ist in Abbildung 3.18 in Abhängigkeit der Querdehnzahl und der Finite-Element-Formulierung dargestellt und zeigt, dass sechs Eigenwerte im Fall der Weggrößenformulierung unphysikalisch stark anwachsen, wenn die Querdehnzahl gegen $\nu = 0,5$ strebt.

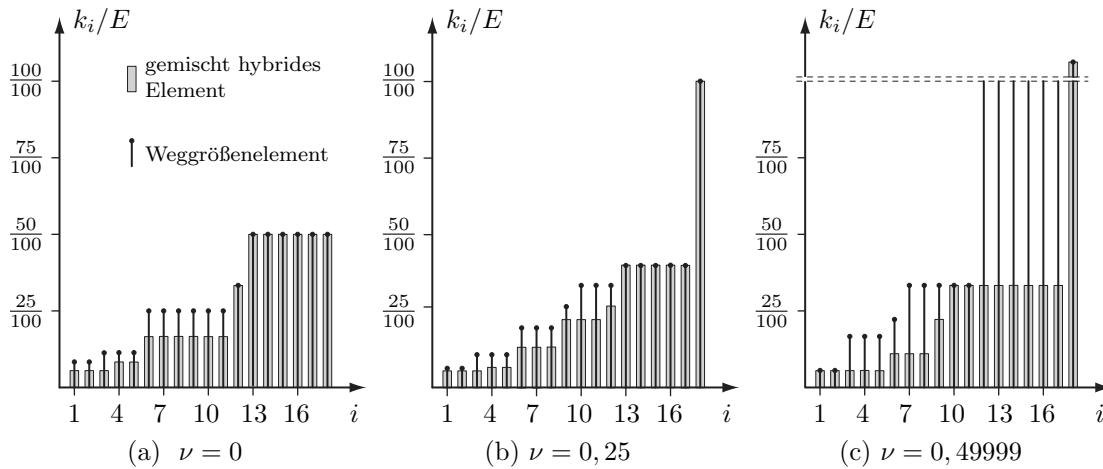


Abbildung 3.18: Verteilung der Eigenwerte in Abhängigkeit der Querdehnzahl (Darstellung ohne Starrkörpermoden mit $k_{19-24} = 0$)

Die Anzahl der unphysikalisch stark anwachsenden Eigenwerte ist mit dem sechsfach überbestimmten Spannungszustand bei Elementen in Weggrößenformulierung begründet. Mit den abgestimmten Ansätzen für die Spannungen nach Gleichung (3.42) und (3.45) ist das Verformungsverhalten der gemischt-hybriden Elemente vom Effekt des volumetrischen Lockings nicht beeinflusst.

Wellenausbreitung in Stäben

Der Einfluss der Bubnov-Galerkin-Stabilisierung nach Gleichung (3.33) ist mit einer Kompressionswelle in einem elastischen Stab in Abhängigkeit von der Courant-Zahl untersucht. Die Courant-Zahl

$$C = c_p \frac{\Delta t}{h} \quad (3.54)$$

gibt an, wie viele Elemente der Länge h von einer Kompressionswelle innerhalb einer Zeitscheibe durchlaufen werden. Die Elastizität des metallischen Stabes ist mit $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ kg/s}^2/\text{m}$ beschrieben. Abweichend vom elastischen Verhalten metallischer Werkstoffe ist die Querdehnzahl für eine eindimensionale Ausbreitung der Kompressionswelle mit $\nu = 0$ festgelegt. Der Stab der Länge $l = 1 \text{ m}$ ist an seinem freien Ende mit einer Dreiecklast innerhalb der Zeit $t = 2l/25/c_p$ derart beansprucht, dass sich seine materiellen Punkte maximal mit einem Wert von $\|\mathbf{u}\| \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ verschieben. Mit der Dichte $\rho_0 = 7850 \text{ kg/m}^3$ der unverformten Struktur breitet sich die Kompressionswelle mit der Geschwindigkeit $c_p \approx 5,172 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ aus, so dass sie nach der Reflexion am gelagerten Ende des Stabes die materiellen Punkte mit einer Periodendauer von $T = 2l/c_p$ durchläuft.

In Abbildung 3.19 ist die Bewegung des Stabes mit dem Geschwindigkeits- und Verschiebungsfeld für den Zeitpunkt $t \approx 0,1 \text{ s}$ dargestellt. Der Verlauf der Verschiebung zeigt die Ausbildung der Verdichtungsfront, in deren Bereich der Verlauf der Geschwindigkeit mit Oszillationen angenähert ist.

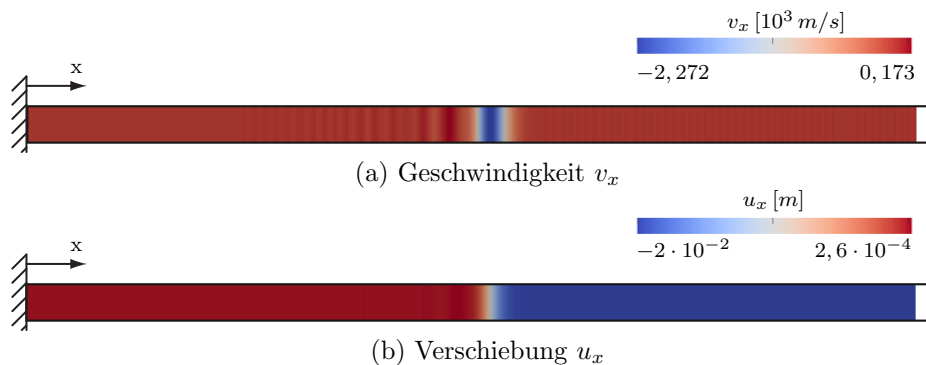


Abbildung 3.19: Weggrößen im Stab für den Zeitpunkt $t \approx 0,1 \text{ s}$

Der Zeitverlauf der Verschiebung in Stabmitte ist in Abhängigkeit der Courant-Zahl für eine elementweise lineare Approximation der Geschwindigkeit in Abbildung 3.20a dargestellt. Die Zeitverläufe zeigen zusammen mit dem jeweils zugehörigen Geschwindigkeitsverlauf in Abbildung 3.20b, dass mit $C \leq 1$ die Verschiebung im Vorlauf der Verdichtungsfront schwankt. Erst wenn die Kompressionswelle mit $C = 10$ mehrere Elemente innerhalb einer Zeitscheibe durchläuft, ist die Abweichung der Verschiebung von deren Mittelwert deutlich geringer. In diesem Fall erstreckt sich die Verdichtungsfront über ein räumlich ausgedehntes Gebiet (vergleiche WAHLHORN [66]). Ist die Finite-Element-Formulierung stabilisiert, ist die Lösung gedämpft und die Schwankung im Geschwindigkeitsverlauf signifikant reduziert (siehe Abbildung 3.20c).

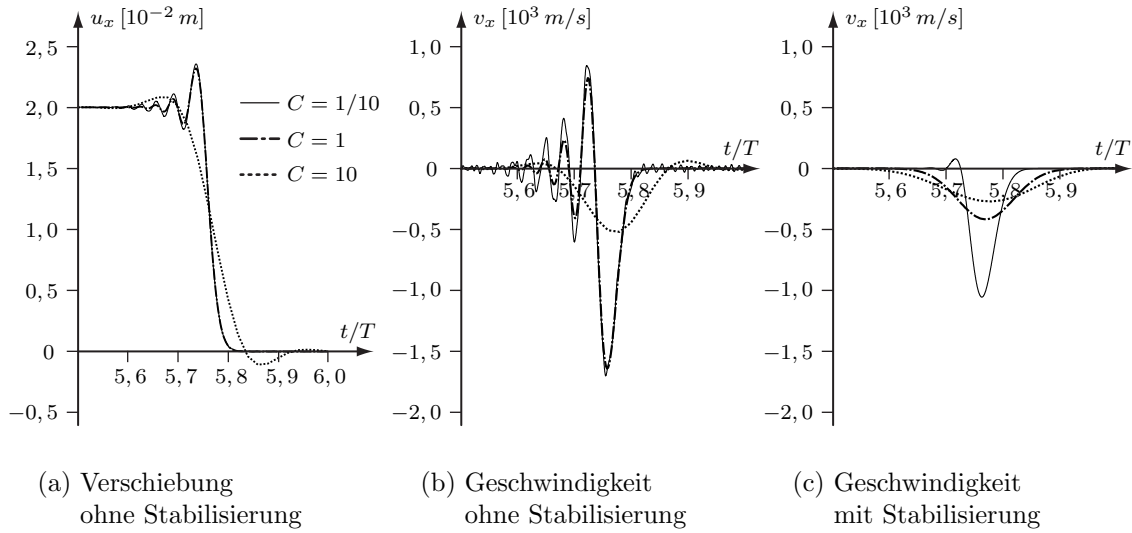


Abbildung 3.20: Zeitverläufe bei linearer Approximation

Ein davon abweichendes Lösungsverhalten zeigt sich, wenn die Geschwindigkeiten quadratisch und der Spannungszustand im Element nicht divergenzfrei angenähert ist. Der Vergleich der Abbildungen 3.21a und 3.20b zeigt, dass der Verlauf der Geschwindigkeit mit einem quadratischen Ansatz besser angenähert und dessen Schwankung wesentlich reduziert ist. Im Bezug auf die Stabilisierung nach Gleichung (3.33) ist berücksichtigt, dass die Divergenz des Spannungszustandes mit

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} \quad \text{und in Komponenten mit} \quad \frac{\partial (F_{ik} S_{kj})}{\partial x_{0i}} = u_{i,ki} S_{kj} + u_{i,k} S_{kj,i} + S_{ij,i} \quad (3.55)$$

bereits bei geometrisch linearem Verformungsverhalten ungleich null ist (vergleiche Abbildung 3.21b mit 3.21c). Ist die Finite-Element-Formulierung allein durch die Massenträgheit stabilisiert, ist die Näherungslösung nach Abbildung 3.21b unabhängig von der Courant-Zahl deutlich gedämpft. Differenzierter ist das Lösungsverhalten, wenn die Finite-Element-Formulierung mit der Impulsbilanz stabilisiert ist (siehe Abbildung 3.21c). In diesem Fall ist das Lösungsverhalten nur bei $C < 1$ verbessert. Hingegen ist eine Schwankung im Nachlauf der Verdichtungsfront zu erkennen, wenn die Kompressionswelle mit $C = 1$ genau ein Element innerhalb einer

Zeitscheibe durchläuft. So ist für den vorliegenden Fall einer sich longitudinal ausbreitenden Kompressionswelle festzuhalten, dass eine Stabilisierung nicht zwingend erforderlich ist, wenn die Geschwindigkeit quadratisch in den Elementen angenähert ist.

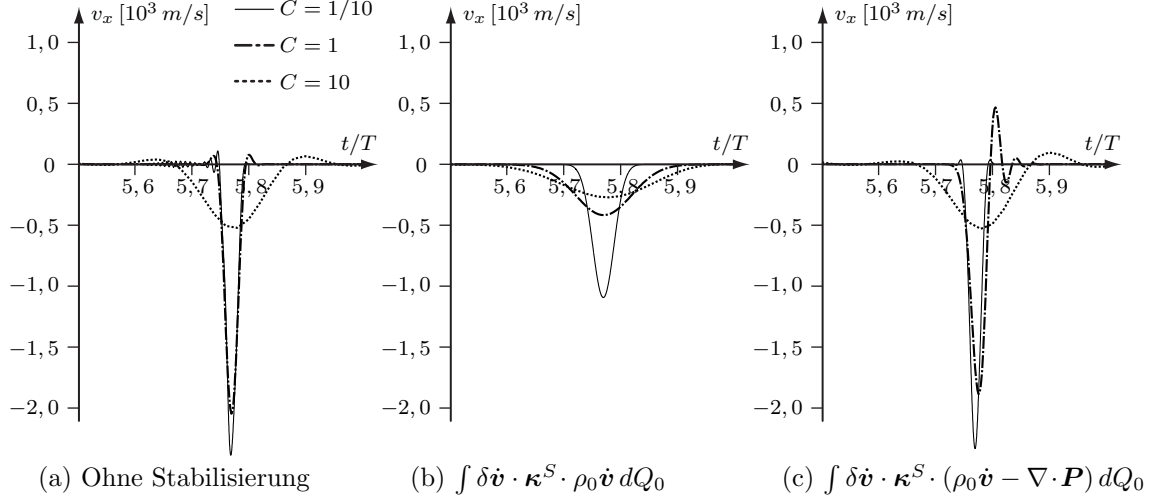


Abbildung 3.21: Geschwindigkeitsverläufe bei quadratischer Approximation

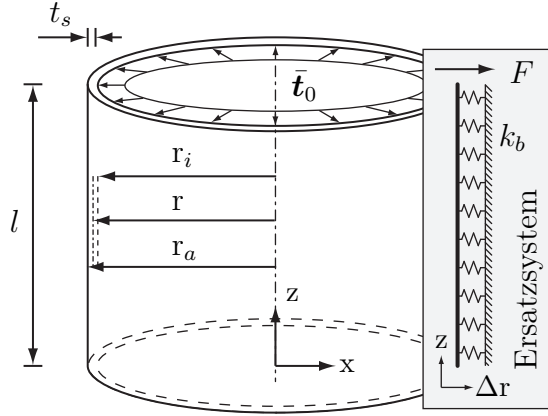
3.2.1.4 Konvergenzverhalten

Kreiszyylinder mit Randspannung

Die Konvergenz der Verschiebungen und Spannungen bei Elementverfeinerung sind im Raum mit der Biegeverformung von Kreiszyinderschalen mit einem Elastizitätsmodul von $E = 10^4 \text{ N/m}^2$ und einer Querdehnzahl von $\nu = 0,25$ untersucht. Die geometrischen Abmessungen der Kreiszyinderschalen sind $r = 1 \text{ m}$, $l = 0,5 \text{ m}$ und $t_s = 0,01 \text{ m}$ oder $t_s = 0,0033 \text{ m}$. Die membrangerecht gelagerten Schalen werden mit einer radialen Randlast von $\|\bar{\mathbf{t}}_0\| = 1 \text{ N/m/t}_s$ verformt (siehe Abbildung 3.22). Sie sind unabhängig von der Approximation der Geschwindigkeiten in Umfangsrichtung mit 80 Elementen diskretisiert. Für eine annähernd gleiche Anzahl an Geschwindigkeitsfreiwerten sind die Schalen in Dickenrichtung bei linearen Lagrange-Ansätzen für die Geschwindigkeiten mit zwei Elementen und im Fall des reduziert symmetrischen und quadratischen Lagrange-Ansatzes mit einem Element diskretisiert.

Die radiale Verschiebung und Normalspannung in Schalenlängsrichtung sind für lineares Verformungsverhalten berechnet, so dass die Beanspruchung der Schalen alternativ mit der Differentialgleichung (3.56) des gebetteten Balkens beschrieben ist.

Mit der Differentialgleichung wird unterstellt, dass der Einfluss von Schubverformungen vernachlässigt werden kann und die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnitts für $t_s \ll r$ erfüllt ist.



Kinematik

$$\Delta r_{,zz} = \kappa$$

Materialmodell

$$M = -EI \kappa, \quad I = \frac{t_s^3}{12}$$

Gleichgewicht

$$M_{,z} = Q$$

$$Q_{,z} = k_b \Delta r, \quad k_b = \sqrt{\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{r t_s}}$$

$$\rightarrow EI \Delta r_{,zzzz} + k_b \Delta r = 0 \quad (3.56)$$

Abbildung 3.22: Kreiszyklinderschale

Die analytische Lösung der Differentialgleichung ist mit dem Biegemoment

$$M = \frac{F}{k_b} \left\{ e^{-k_b(l-z)} \sin(k_b(l-z)) \right\} \quad (3.57)$$

für den speziellen Fall einer Randlast F gegeben und mit $S_{zz} = M/t_s^2/6$ für Kreiszyklinderschalen mit einer Schlankheit von $r/t_s = 300$ in Abbildung 3.23 dargestellt. Die Näherungslösungen für die Normalspannung entlang der Schaleninnenseite, die bei linearer Approximation der Verschiebungen mit 10 und bei quadratischer Approximation mit fünf Elementen über deren Höhe berechnet sind, vervollständigen die Abbildung. Sie lassen erkennen, dass in beiden Fällen die Normalspannung im Mittel richtig abgebildet ist.

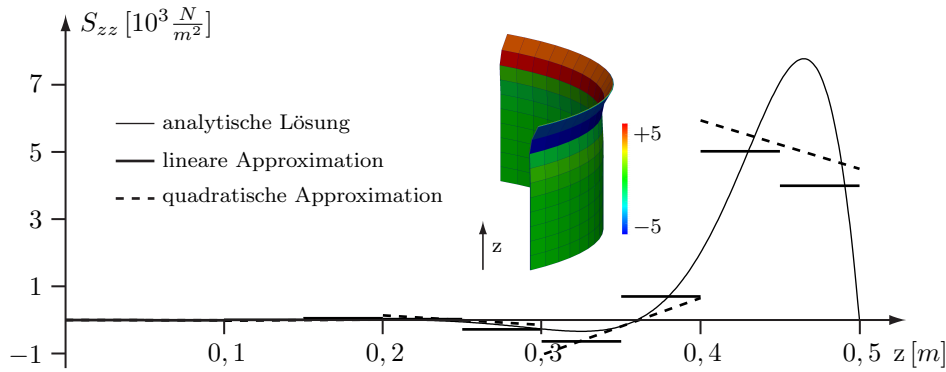


Abbildung 3.23: Verlauf der Normalspannung S_{zz}

Die Konvergenz der Näherungslösung ist mit den Fehlern

$$e^u = \sqrt{\frac{\int (u_x^{\text{ref}} - u_x^{\text{app}})^2 dz \Big|_{x=r, y=0}}{\int (u_x^{\text{ref}})^2 dz \Big|_{x=r, y=0}}} \quad \text{und} \quad e^S = \sqrt{\frac{\int (S_{zz}^{\text{ref}} - S_{zz}^{\text{app}})^2 dz \Big|_{x=r_i, y=0}}{\int (S_{zz}^{\text{ref}})^2 dz \Big|_{x=r_i, y=0}}} \quad (3.58)$$

für die radiale Verschiebung und Normalspannung in Schalenlängsrichtung und der Verdichtung der Finite-Elemente-Netze über die Höhe der Schalen bestimmt. Da die analytische Lösung der Differentialgleichung (3.56) sowohl den veränderlichen Radius über die Dicke von Schalen als auch deren Schubverformungen nicht berücksichtigt, sind die Referenzlösungen mit jeweils 1.000 Elementen über die Höhe der Schalen berechnet. Der Fehler in der radialen Verschiebung ist in Abbildung 3.24 in Abhängigkeit der Elementlänge h dargestellt. Die Entwicklung des Fehlers zeigt, dass die Konvergenz der Weggrößen aufgrund der gemischten Formulierung der Modellgleichungen eine Ordnung höher ist als die Ordnung ihrer Polynomansätze.

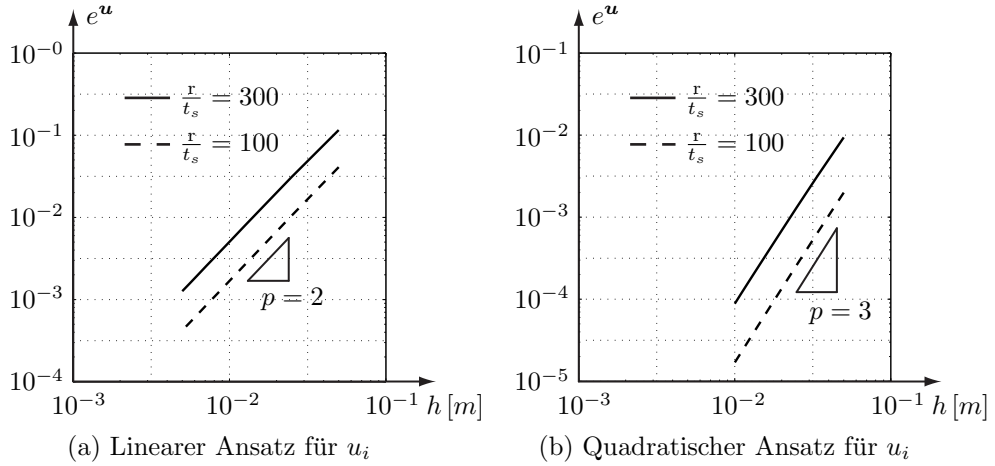


Abbildung 3.24: Konvergenz des Verschiebungsfeldes

Die Entwicklung des Fehlers in der Normalspannung ist in den Abbildungen 3.25 dargestellt. Die Verläufe zeigen, dass die Normalspannung mit einer Ordnung niedriger gegen die Referenzlösung konvergiert als die radiale Verschiebung. Dabei ist der berechnete Fehler bei gleicher Elementierung um so größer, je schlanker die Schale ist.

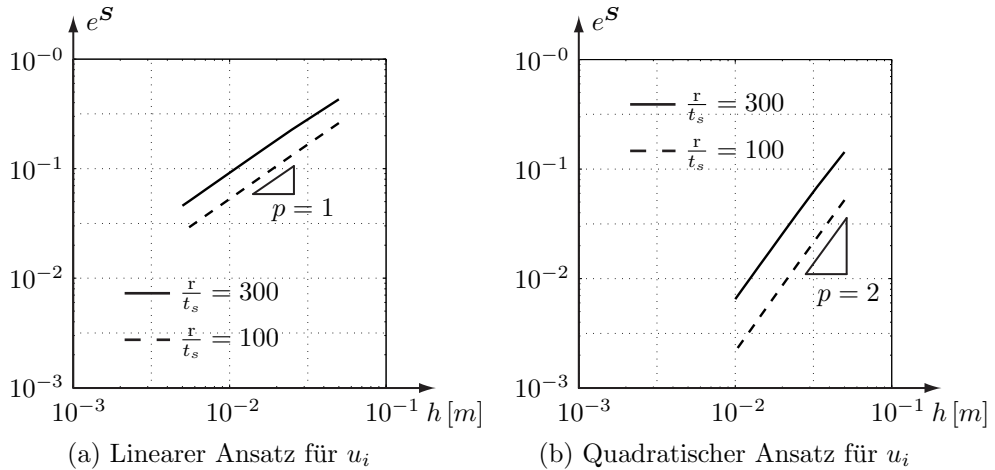


Abbildung 3.25: Konvergenz des Spannungsfeldes

Gekrümmter Balken unter reiner Biegung

In Bezug auf die numerische Analyse von dünnwandigen Siloschalen wird das Lösungsverhalten gemischt-hybrider Elemente bei gekrümmten Strukturen mit der Verformung von gekrümmten Balken unter reiner Biegung untersucht. Für die in Abbildung 3.26 angegebenen Modellparameter ist anschließend die Kondition der zugehörigen Gleichungssysteme mit der Konvergenz ihrer Lösungsvektoren innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens bewertet.

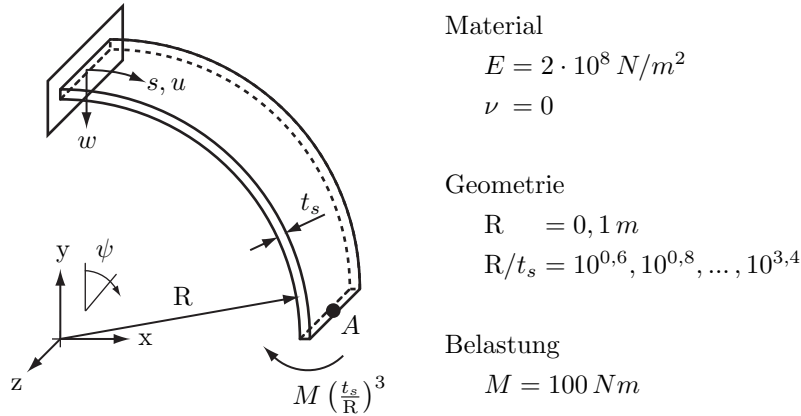


Abbildung 3.26: Modellparameter des gekrümmten Balkens

Das lineare Verformungsverhalten gekrümmter und randbeanspruchter Balken ist auf Grundlage der Bernoulli-Hypothesen mit den Gleichungen

$$w = u, \psi, \quad (3.59a)$$

$$\varphi = w, s + \frac{1}{R} u \text{ und} \quad (3.59b)$$

$$\kappa = \varphi, s, \quad (3.59c)$$

der Kinematik, dem Materialmodell

$$M = -EI\kappa \quad (3.60)$$

und den Gleichgewichtsbedingungen

$$M, s = Q, \quad (3.61a)$$

$$Q, s + \frac{1}{R} N = 0 \text{ und} \quad (3.61b)$$

$$N, s - \frac{1}{R} Q = 0 \quad (3.61c)$$

beschrieben (vergleiche PETERSEN [48]).

Die Modellgleichungen sind mit

$$d\psi R = ds \quad (3.62)$$

in der Differentialgleichung

$$u, \psi \psi \psi \psi \psi + 2u, \psi \psi \psi \psi + u, \psi \psi = 0 \quad (3.63)$$

zusammengefasst, deren spezielle Lösung für die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(\psi = 0) &= 0 & w(u(\psi = 0)) &= 0 & \varphi(u(\psi = 0)) &= 0 \\ N(u(\psi = \frac{\pi}{2})) &= 0 & Q(u(\psi = \frac{\pi}{2})) &= 0 & M(u(\psi = \frac{\pi}{2})) &= M \end{aligned}$$

mit

$$w(\psi) = M \frac{R^2}{EI} (\cos(\psi) - 1) \quad (3.64)$$

gegeben ist.

Für einen Vergleich ist zuerst die Verformung gekrümmter Balken für eine Weggrößenformulierung der Modellgleichungen berechnet. Für eine lineare Approximation der Verschiebungen ist die Güte der Näherungslösung mit dem Verhältnis u_x^A/w^A in Abhängigkeit der Schlankheit R/t_s und für unterschiedliche Elementierungen entlang der gekrümmten Achse in Abbildung 3.27a dargestellt. Sie zeigt, dass erst mit einer Vielzahl an Elementen die analytische Lösung hinreichend genau angenähert wird und die berechnete Verschiebung am Punkt A schnell abnimmt, wenn sich die Schlankheit erhöht. So ist festzuhalten, dass mit linearen Lagrange-Ansätzen für die Verschiebungen die Steifigkeit von dünnwandigen Schalen unzureichend beschrieben ist. Auch mit quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen weicht die Näherungslösung bei großen Schlankheiten noch deutlich von der analytischen Lösung ab (siehe Abbildung 3.27b).

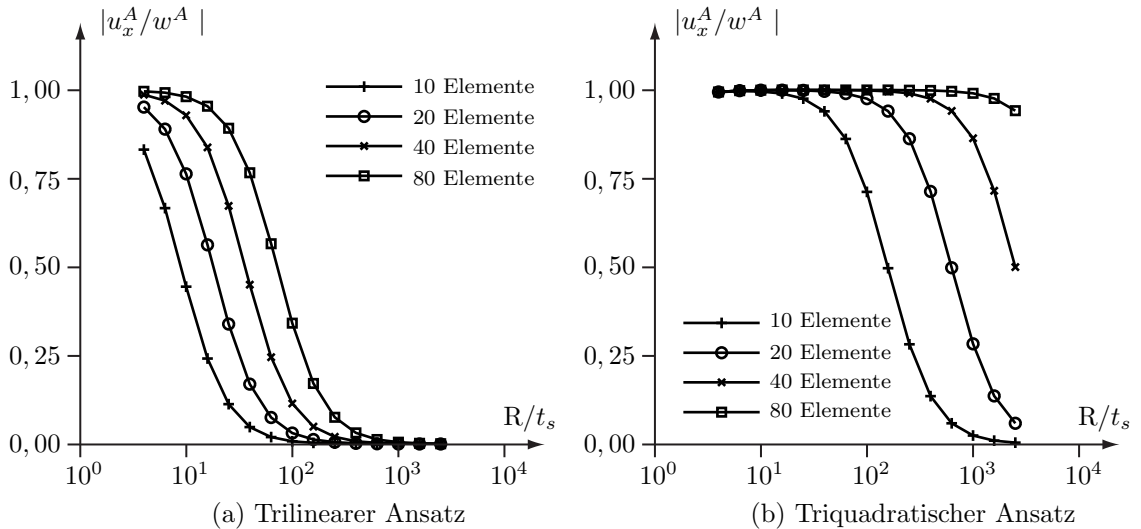


Abbildung 3.27: Normierte Näherungslösung - Weggrößenformulierung

Wesentlich besser ist die Steifigkeit von dünnwandigen Schalen mit abgestimmten Ansätzen in gemischt-hybriden Elementen angenähert (siehe Abbildung 3.28). Wenn auch die Steifigkeit von dünnwandigen Schalen besser angenähert ist, lassen die Verläufe in Abbildung 3.28a erkennen, dass bei linearen Lagrange-Ansätzen für die Verschiebungen das Verformungsverhalten gemischt-hybrider Elemente vom Phänomen des Membranlockings geprägt ist (vergleiche BISCHOFF [8]). Sind die Verschiebungen hingegen mit quadratischen Lagrange-Ansätzen beschrieben, ist die Referenzlösung auch für große Schlankheiten mit wenigen Elementen nahezu exakt abgebildet. Die Abweichung im Bereich moderater Schlankheiten ist auf die Verkrümmung des Querschnitts dicker Balken zurückzuführen, die in der Referenzlösung nach Gleichung (3.64) nicht berücksichtigt ist.

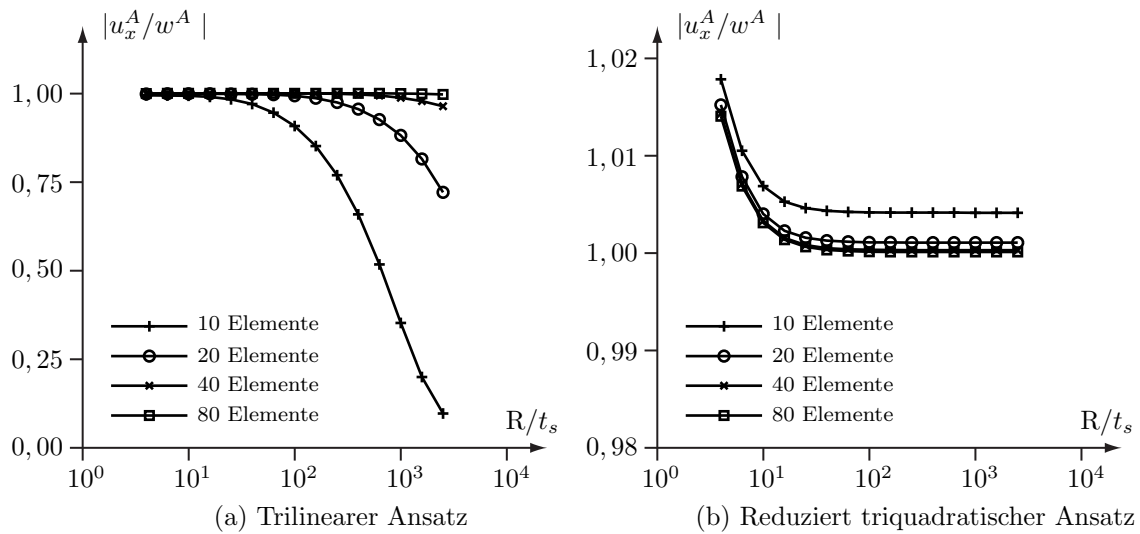


Abbildung 3.28: Normierte Näherungslösung - gemischte Formulierung

Eine numerische Analyse des Verformungsverhaltens des Bogens mit einer Schlankheit $R/t_s \gtrsim 1600$ ist mit den gewählten Elementen aufgrund fehlender Konvergenz innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens jedoch nicht möglich (siehe Tabelle 3.4).

Iterations- schritt	$\ \Delta \hat{\mathbf{v}}\ $ in m/s		
	$R/t_s = 100$	$R/t_s = 398$	$R/t_s = 1585$
1	$1,4987 \cdot 10^{+2}$	$1,4986 \cdot 10^{+2}$	$1,5025 \cdot 10^{+2}$
2	$2,9075 \cdot 10^{-9}$	$8,1055 \cdot 10^{-7}$	$4,0414 \cdot 10^{-5}$
3	—	$4,0347 \cdot 10^{-11}$	$1,3471 \cdot 10^{-7}$
4	—	—	$4,3812 \cdot 10^{-10}$

Tabelle 3.4: Konvergenz des Lösungsvektors

An der Anzahl erforderlicher Iterationen ist zu sehen, dass das vorliegende Problem mit steigender Schlankheit zunehmend schlechter gestellt ist. Während der Zuwuchs in den Geschwindigkeitsfreiwerten bei linearem Verformungsverhalten von Schalen

im zweiten Iterationsschritt im Bereich der Rechengenauigkeit liegen sollte, sind mit zunehmender Schlankheit mehrere Iterationsschritte für die Lösung des linearen Gleichungssystems erforderlich. So ist bei zunehmender Schlankheit vermehrt durch die Residuen beeinflusst, welche Freiwerte sich wie stark an der Lösung des Gleichungssystems beteiligen. Die schlechte Konvergenz des Zuwuchses in den Freiwerten ist mit den räumlichen Ansätzen für die Beschreibungsvariablen in Volumenelementen begründet, mit denen die Biege- und Membransteifigkeit von Schalen, selbst bei linearem Verformungsverhalten, gekoppelt sind (vergleiche WALL [67]).

3.2.2 Fluid

Für die numerische Analyse selbstinduzierter Entleerungen von Silos ist nachfolgend eine Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung für inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen der Fluidmechanik vorgestellt.

Mit dem Ziel eines stabileren Lösungsverhaltens ist die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung mit Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Stabilisierungen erweitert, so dass sie mit räumlich gleichwertigen Polynomansätzen in Analogie zur Struktur diskretisiert werden kann. Das verbesserte Lösungsverhalten ist für das Geschwindigkeitsfeld in der Nähe eines umströmten Zylinders bestätigt. Die Auswirkungen nicht abgestimmter Ansätze für die Geschwindigkeiten und die Dichte zeigen sich besonders deutlich im Grenzfall inkompressibler Strömungen in geschlossenen Gebieten. So ist die Güte der Näherungslösung für unterschiedliche Diskretisierungen an einem Modell der Driven-Cavity-Strömung untersucht.

Mit Bezug auf eine *ALE*-Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen für die Berechnung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen ist gezeigt, wie die Geschwindigkeit eines ortsveränderlichen Beobachters innerhalb der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung berücksichtigt werden kann. Darauf aufbauend ist die Methodik für die Bewegung des Finite-Elemente-Netzes im Gebiet des Fluids vorgestellt. Für eine quadratische Konvergenz der Lösung innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens ist die Linearisierung der diskretisierten Modellgleichungen bezüglich der Netzbewegung beschrieben.

3.2.2.1 Arbeitsgleichung

Die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung für die Berechnung von Zustandsänderungen kompressibler Fluide setzt sich aus zwei schwachen Formen zusammen. Die stabilisierte Arbeitsgleichung

$$\int_{Q_n} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) dQ \quad (3.65a)$$

$$+ \int_{Q_n} \delta \mathbf{D}^d(\delta \mathbf{v}) : 2\mu_{\text{ef}} \mathbf{D}^d(\mathbf{v}) dQ - \int_{Q_n} \nabla \cdot \delta \mathbf{v} p(\rho) dQ - \int_{Q_n} \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dQ \quad (3.65b)$$

$$- \int_{P_n^N} \delta \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}} dP^N \quad (3.65c)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta \mathbf{v}(t_n^+) \cdot (\rho \mathbf{v}(t_n^+) - \rho \mathbf{v}(t_n^-)) d\Omega \quad (3.65d)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \kappa_{\text{SUPG}}^v \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \mathbf{v} \cdot \mathcal{L}_1^F dQ = 0 \quad (3.65e)$$

stellt die schwache Form der Impulserhaltung innerhalb einer Raum-Zeit-Scheibe dar. Die zweite schwache Form sichert mit

$$\int_{Q_n} \delta w \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dQ \quad (3.66a)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta w(t_n^+) \cdot (\rho(t_n^+) - \rho(t_n^-)) d\Omega \quad (3.66b)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \kappa_{\text{SUPG}}^\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \delta w \mathcal{L}_M dQ = 0 \quad (3.66c)$$

die Masseerhaltung. Die Integrale der Arbeitsgleichung (3.65a) und (3.65b) sind der in Raum und Zeit schwachen Formulierung der lokalen Form der Impulserhaltung nach Galerkin gleichwertig, wenn die Divergenz des Cauchy-Spannungstensors mit dem Integralsatz nach Gauß auf die Wichtung $\delta \mathbf{v}$ mit

$$- \int \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dQ = \int \text{sym}(\nabla \delta \mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma} dQ - \int \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dP \quad (3.67)$$

übertragen und der Fluss über den Rand beschrieben ist. Mit Gleichung (3.67) ist berücksichtigt, dass der Cauchy-Spannungstensor symmetrisch ist, so dass mit dem symmetrischen Anteil von $\nabla \delta \mathbf{v}$, der nach Gleichung (2.37) zugleich dem virtuellen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor $\delta \mathbf{D}$ entspricht, der Integrand im Gebietsintegral vollständig erfasst ist. Wenn auch das Gebietsintegral bezüglich des Spannungsdeviators $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}$ mit dem virtuellen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor ausgewertet ist, so ist das Arbeitsintegral in Zeile (3.65b) mit dessen deviatorischem Anteil formuliert. Damit ist berücksichtigt, dass mit $\tau_{ii} = 0$ die hydrostatische Spannung separat mit dem Druck p beschrieben ist. Das Randintegral in Zeile (3.65c) erweitert die Arbeitsgleichung mit der schwachen Form der Neumann-Randbedingung

$$\int \delta \mathbf{v} \cdot (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) dP^N \quad (3.68)$$

für den viskosen Fluss $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Mit der schwachen Form (3.68) ist zugleich das Randintegral in Gleichung (3.67) auf dem Neumann-Rand ausgewertet. Die Substitution

von $\text{sym}(\nabla \delta \mathbf{v})$ mit $\delta \mathbf{D}$ setzt voraus, dass der virtuelle Geschwindigkeitszustand kinematisch verträglich ist. Aus diesem Grund sind die Cauchy-Randspannungen \mathbf{t} auf dem Dirichlet-Rand nicht zu variieren. Das Einsetzen der Werkstoffgleichung (2.36) für den deviatorischen Anteil des Spannungstensors und die Zustandsgleichung (2.42) oder (2.39) für den Druck führt zusammen mit der Kinematik nach Gleichung (2.37) auf die Anwendungsgleichung des Prinzips der virtuellen Leistung. Sie ist mit den Geschwindigkeiten und der Dichte als primäre Beschreibungsvariable formuliert. Abweichend von der Spannungsrandbedingung ist die Wegrandbedingung

$$\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (3.69)$$

auf dem Dirichlet-Rand entsprechend der Kinematik mit den Ansätzen für die Geschwindigkeiten in starker Form erfüllt. Die Anfangsbedingung \mathbf{v}_0 für die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t_0^-) - \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

ist mit der schwachen Form der Übergangsbedingung zwischen den Zeitscheiben in Zeile (3.65d) berücksichtigt. Sie ist mit der Impulsdichte $\rho \mathbf{v}$ arbeitskonform formuliert.

Mit der Arbeitsgleichung (3.65) ist unterstellt, dass die lokale Form der Masseerhaltung an jedem Punkt im Raum und in der Zeit erfüllt ist. Damit ist die materielle Zeitableitung allein mit dem gewichteten Integranden in Zeile (3.65a) beschrieben. Alternativ kann die konservative Form der Impulserhaltung nach Galerkin und partieller Integration in schwacher Form mit

$$\int \delta \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} - \rho \mathbf{g} \right) dQ - \int \nabla \delta \mathbf{v} : (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) dQ + \int \delta \mathbf{v} \cdot (\bar{\mathbf{t}}_{\text{adv}} - \bar{\mathbf{t}}_{\text{vis}}) dP^N \quad (3.71)$$

formuliert werden (vergleiche GROHMANN [28]). In diesem Fall ist mit $\bar{\mathbf{t}}_{\text{adv}}$ neben dem viskosen auch der advective Fluss auszuwerten, wenn dieser entlang eines Randes ungleich null ist. In Bezug auf die Entleerung von Silos ist damit der Massestrom an der Auslauföffnung vorzugeben, was einem geregelten Abzug des Schüttgutes mit einem Transportband entspricht. So liegt mit den Gleichungen (3.65) und (3.66) eine Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung vor, mit der selbstinduzierte Entleerungen von Silos berechnet werden können, bei denen auch die Möglichkeit besteht, dass der Massestrom an der Auslauföffnung infolge hoher innerer Reibung zum Erliegen kommt. In diesem Zusammenhang ist darauf hingewiesen, dass mit Anwendung der *fragmented finite element method* der Rand, der mit der freien Oberfläche des Schüttgutes definiert ist, in der Lagrangeschen Betrachtungsweise implizit erfasst ist (siehe Kapitel 6.2.2). Damit entfällt der konvektive Term der materiellen Zeitableitung der Impulsdichte, so dass entlang der freien Oberfläche nur die Neumann-Randbedingung für den viskosen Fluss zu definieren ist. Während für eine Näherungslösung der Impulserhaltung sowohl Anfangs- als auch Randbedingungen formuliert sind, ist bezüglich der Masseerhaltung nur eine Anfangsbedingung erforderlich (vergleiche Kapitel 2.2.2). So ist die schwache Form der Masseerhaltung nur

mit dem Sprungterm (3.66b) ergänzt, mit dem die Anfangsbedingung für die Dichte

$$\rho(t_0^-) - \rho_0 = 0 \quad (3.72)$$

in schwacher Form erfüllt ist. Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Stabilisierungen (SUPG-Stabilisierungen) vervollständigen mit den Integralen (3.65e) und (3.66c) die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung. Mit der SUPG-Stabilisierung der Arbeitsgleichung (3.65) sind die virtuellen Geschwindigkeiten in Richtung der Bewegung der materiellen Punkte stärker gewichtet. Damit kann der räumliche Verlauf der Näherungslösung auch dann noch weitgehend frei von Oszillationen sein, wenn materielle Punkte innerhalb einer Zeitscheibe mehrere Elemente durchströmen (siehe WALHORN [66]). Der Stabilisierungsparameter im Integral (3.65e) ist mit

$$\kappa_{\text{SUPG}}^v = 1/\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\Delta \mathbf{v}\|}{h}\right)^2 + \left(\frac{12\mu_{\text{ef}}}{\rho h^2}\right)^2} \quad (3.73)$$

in Anlehnung an SHAKIB [54] definiert. Er ist von der Zeitschrittweite, den Differenzgeschwindigkeiten $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}$, der charakteristischen Länge h und der kinematischen Viskosität $\nu = \mu_{\text{ef}}/\rho$ abhängig. Die charakteristische Länge

$$h = \sqrt[3]{\frac{48 \det(\mathbf{J}_e)}{\pi}} \quad (3.74)$$

ist mit dem Durchmesser einer dem Volumen des jeweiligen Elementes äquivalenten Kugel bestimmt. Mit der Stabilisierung ist die Divergenz des Spannungsfeldes auszuwerten. Das Materialmodell nach Gleichung (2.36) bildet den Deviator des Verzerungsgeschwindigkeitstensors mit der effektiven Viskosität auf den Spannungsdeviator ab. Folglich ist bereits mit einer linearen Approximation der Beschreibungsvariablen im Element ein Fluss über den Rand beschrieben. Mit der Geschwindigkeit und Dichte als primäre Beschreibungsvariablen und Anwendung des Divergenzoperators wird die lokale Form der Impulserhaltung in

$$\mathcal{L}_1^F = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{g} \right) + \nabla p - \mu_{\text{ef}} \nabla \cdot \mathbf{D}^d - \nabla \mu_{\text{ef}} \cdot \mathbf{D}^d \quad (3.75)$$

$$\text{mit } \nabla \mu_{\text{ef}} = \frac{\partial \mu_{\text{ef}}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \rho} \nabla \rho + \frac{\partial \mu_{\text{ef}}}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{D}} : \nabla \mathbf{D}$$

umgeformt. In Übereinstimmung mit dem Stabilisierungsparameter κ_{SUPG}^v ist die schwache Form der Masseerhaltung mithilfe von

$$\kappa_{\text{SUPG}}^p = 1/\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\Delta \mathbf{v}\|}{h}\right)^2} \quad (3.76)$$

im Integral (3.66c) erweitert. Während die Arbeitsgleichung (3.26) für nachgiebige Strukturen für Stabilitätsanalysen von Kreiszyinderschalen stabilisiert ist, sind die schwachen Formen (3.65) und (3.66) für eine Reduktion von Oszillationen im

räumlichen Verlauf der Näherungslösung im Bereich von Schockfronten innerhalb des Geschwindigkeits- und Dichtefeldes nicht stabilisiert. Damit ist angenommen, dass sich das Fluid nicht schlagartig sondern in räumlichen Bereichen stetig verdichtet und auflockert. In diesem Zusammenhang ist darauf hingewiesen, dass der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit auf der Modellierung der Entleerung von Silos und der Entwicklung einer Methode für eine Näherungslösung ihrer Modellgleichungen liegt. So ist für eine detaillierte Diskussion von Stabilisierungstechniken auf GROHMANN [28] verwiesen, der wie auch TEZDUYAR [61] verbesserte Stabilisierungsparameter für eine vollständig stabilisierte Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung kompressibler Fluide entwickelt hat.

Je kleiner die Kompressibilität eines Fluids ist, desto weniger verändert sich die Dichte in Raum und Zeit bis für den Grenzfall $K \rightarrow \infty$ die Dichte mit $\dot{\rho} = 0$ konstant ist. Damit reduziert sich die Masseerhaltung auf die Kontinuitätsgleichung (2.43) und ersetzt in der stabilisierten schwachen Form

$$\int_{Q_n} \delta p \nabla \cdot \mathbf{v} dQ \quad (3.77a)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \kappa_{\text{Kont}} \rho \nabla \cdot \delta \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} dQ = 0 \quad (3.77b)$$

Gleichung (3.66), bis hin zu der Arbeitsgleichung inkompressibler Fluide. Mit dem virtuellen Druck ist die Kontinuitätsgleichung leistungskonform gewichtet, so dass anstelle der Zustandsgleichungen (2.42) oder (2.39) der Druck über das Zeitintegral mit der volumetrischen Verzerrungsgeschwindigkeit $\nabla \cdot \mathbf{v}$ festgelegt ist. Die schwache Form der Kontinuitätsgleichung ist für nicht divergenzfreie Geschwindigkeitsansätze mit dem Parameter

$$\kappa_{\text{Kont}} = \frac{h}{2} \|\Delta \mathbf{v}\| \zeta \quad \text{und} \quad \zeta = \begin{cases} \frac{\text{Re}_e}{3} & \text{für } \text{Re}_e < 3 \\ 1 & \text{für } \text{Re}_e \geq 3 \end{cases} \quad (3.78)$$

nach BEHR [5] in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_e = \frac{\rho \|\Delta \mathbf{v}\| h}{\mu_{\text{ef}}} \quad (3.79)$$

des jeweiligen Elementes stabilisiert. Ist für den Druck in den Elementen der gleiche Ansatz gewählt wie für die Geschwindigkeiten sind die Ansätze nach Gleichung (3.77a) nicht aufeinander abgestimmt. In diesem Fall ist die Arbeitsgleichung zusätzlich auf Grundlage der Impulserhaltung mit

$$\sum_e \int_{Q_n^e} \kappa_{\text{PSPG}} \frac{1}{\rho} \nabla \delta p \cdot \mathcal{L}_I^F dQ \quad (3.80)$$

stabilisiert, so dass die Systemmatrix regulär wird. Dabei ist der Stabilisierungsparameter κ_{PSPG} identisch κ_{SUPG}^v gewählt (siehe TEZDUYAR [60]).

3.2.2.2 Ansätze

Die schwache Form der Erhaltungsgleichungen ist mit Ansätzen für die Geschwindigkeiten und die Dichte oder den Druck als primäre Beschreibungsvariablen diskretisiert. Damit sind in Modellen der Fluid-Struktur-Wechselwirkung die Geschwindigkeitsfreiwerte des Fluids mit denen der Struktur entlang des gemeinsamen Randes direkt gekoppelt oder unmittelbar in Relation gesetzt.

Für inkompressible Fluide beschreibt DONEA [19], dass in zweidimensionalen Elementen, deren Referenzelement mit der geometrischen Form eines Quadrates beschrieben ist, die Ladyschenskaja-Babuška-Brezzi-Bedingung (LBB-Bedingung) nicht erfüllt ist, wenn die Geschwindigkeiten mit einem bilinearen Ansatz beschrieben sind und der Druck elementweise konstant formuliert ist. Unter der Voraussetzung, dass die LBB-Bedingung erfüllt sein soll, kann der Druck diskontinuierlich mit einem vollständig linearen Ansatz beschrieben werden, wenn die Geschwindigkeiten nach CROUZEIX & RAVIART [16] in einem Referenzelement in geometrischer Form eines Dreiecks formuliert sind. Hingegen erfüllt der Ansatz für den Druck in einem quadratischen Referenzelement die LBB-Bedingung, wenn er mit einem bilinearen Ansatz auf symmetrische und quadratische Lagrange-Ansätze für die Geschwindigkeiten nach Taylor-Hood abgestimmt ist (siehe ARNOLD [1]).

Aus diesem Grund ist neben den Geschwindigkeiten auch der Druck oder die Dichte in den Elementen nach Abbildung 3.8 mit einem im Raum kontinuierlichen Ansatz beschrieben. Während der Druck oder die Dichte im Raum stets mit linearen Lagrange-Ansätzen beschrieben ist, ist der räumliche Verlauf der Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Ansätze für die geometrische Beschreibung der Elemente alternativ mit linearen oder quadratischen Lagrange-Ansätzen nach Gleichung (3.41) beziehungsweise (3.46) formuliert.

Im Folgenden ist der Einfluss der Ansätze für die Geschwindigkeiten auf das Lösungsverhalten der Elemente am Druckfeld für eine Driven-Cavity-Strömung analysiert. Im Bezug auf die Kopplung von Elementen der Struktur- oder Fluidmechanik ist für den räumlichen Fall untersucht, in wie weit der Druck nach Gleichung (3.80) stabilisiert werden muss, wenn die Geschwindigkeiten mit reduziert quadratischen Lagrange-Ansätzen nach Gleichung (3.44) diskretisiert sind.

Driven Cavity

Das Feld der Driven-Cavity-Strömung ist in einem quadratischen Behälter mit einer Seitenlänge von $l = 1\text{ m}$ im ebenen Verzerrungszustand berechnet. Dem Benchmark [72] folgend, bewegt sich das Fluid in einem geschlossenen Behälter mit glatten Wänden, so dass das Geschwindigkeitsfeld normal zum Rand allseitig zu null gesetzt ist. Entlang des oberen Randes setzt die in Abbildung 3.29 dargestellte Randgeschwindigkeit das Fluid in Bewegung.

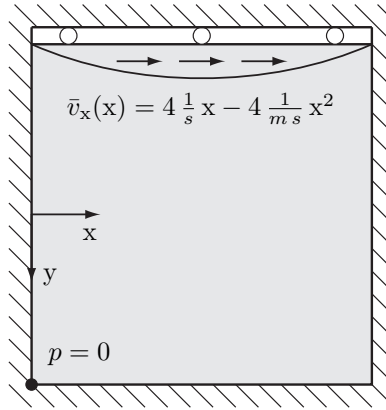


Abbildung 3.29: Driven Cavity

Abweichend vom Modell nach ZIENKIEWICZ [72], bei dem die Randgeschwindigkeit konstant entlang der x-Achse verläuft, ist für die Analyse des Druckfeldes die Randgeschwindigkeit mit einer quadratischen Funktion gewählt. Damit ist sichergestellt, dass Schwankungen im Druckfeld nicht durch die sprunghafte Veränderung der Randgeschwindigkeit bedingt sind. Die dynamische Viskosität von $\rho\nu = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ N s/m}^2$ legt zusammen mit der Dichte von $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ die Parameter des Newton'schen Fluid fest. Das Gebiet der Driven-Cavity-Strömung ist für eine gleiche Anzahl an Freiheitsgraden für das Druckfeld stets mit 20×20 Elementen beschrieben. Die Besonderheit der Driven-Cavity-Strömung liegt in dem allseitig geschlossenen Gebiet, in das Fluid weder ein- noch ausströmen kann. Damit sind erhöhte Anforderungen an die Abstimmung des Ansatzes für den Druck auf die Ansätze der Geschwindigkeiten gestellt, wenn das Fluid als inkompressibel angesetzt ist. Aus diesem Grund ist das elementweise linear beschriebene Druckfeld für unterschiedliche Approximationen der Geschwindigkeiten analysiert, das sich bei der in Abbildung 3.30b dargestellten Strömung einstellt. Die Geschwindigkeitsvektoren und Strömungslinien zeigen, dass im quasi-stationären Zustand bei der gegebenen Diskretisierung nur ein gegenläufiger Wirbel zu der primären Strömung abgebildet ist (vergleiche GHIA [24]).

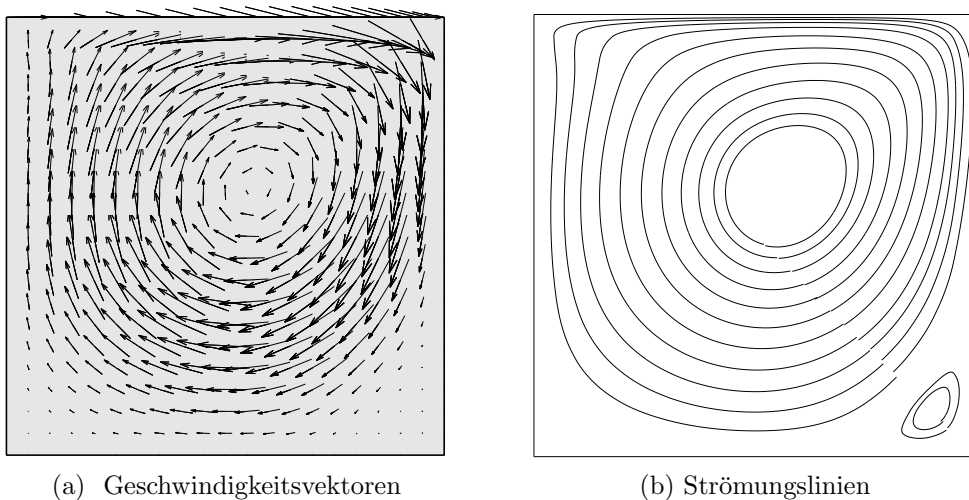


Abbildung 3.30: Geschwindigkeitsfeld im quasi-stationären Zustand

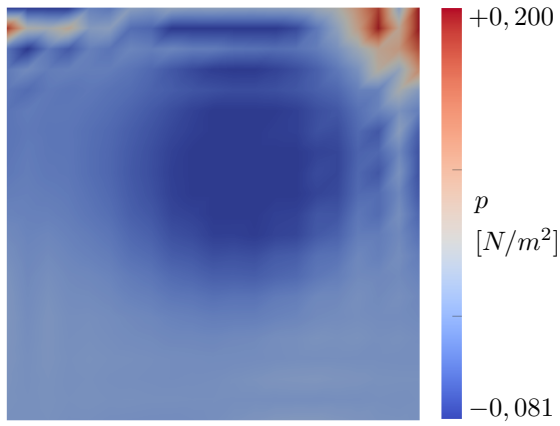
Ist die Strömung mit einer 0,01-fachen PSPG-Stabilisierung nach Gleichung (3.80) berechnet, ist das in Abbildung 3.31a dargestellte Druckfeld im Fall linearer Lagrange-Ansätze für die Geschwindigkeiten und den Druck starken Oszillationen unterworfen. Die Näherungslösung für eine vollständige Stabilisierung des Drucks zeigt hingegen in Abbildung 3.31c einen glatten Verlauf des Druckfeldes. Mit der Näherungslösung für das Strömungsfeld mit Berücksichtigung einer SUPG- und PSPG-Stabilisierung auf Grundlage der Impulserhaltung wird gezeigt, dass im vorliegenden Fall eine Stabilisierung der Kontinuitätsgleichung (2.43) mit dem Arbeitsterm (3.77b) nicht erforderlich ist (vergleiche Abbildung 3.31e mit 3.31f). Ist der Verlauf der Geschwindigkeiten im Element quadratisch angenähert und der Druck mit einem linearen Lagrange-Ansatz beschrieben, ist eine Druckstabilisierung nur erforderlich, wenn die Geschwindigkeiten mit dem reduziert quadratischen Lagrange-Ansatz nach Gleichung (3.44) im Element formuliert sind (vergleiche Abbildung 3.31b mit 3.31d). Sind die Geschwindigkeiten hingegen mit dem symmetrischen Ansatz nach Gleichung (3.46) approximiert, so sind die Ansätze für das Druck- und Geschwindigkeitsfeld aufeinander abgestimmt, so dass eine PSPG-Stabilisierung der Finite-Element-Formulierung nicht erforderlich ist. In Bezug auf die abgestimmten Ansätze für die Berechnung nachgiebiger Strukturen nach Kapitel 3.2.1.2 ist festzuhalten, dass mit dem reduziert symmetrischen und quadratischen Lagrange-Ansatz nach Gleichung (3.44) die LBB-Bedingung auch im räumlichen Fall nicht erfüllt ist.

Zylinderumströmung

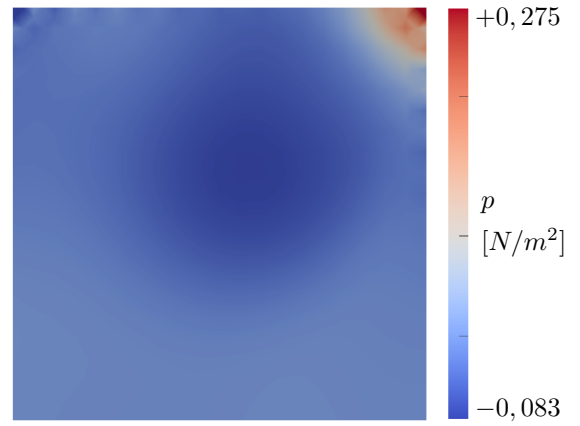
Die Erfordernis einer SUPG-Stabilisierung ist am Geschwindigkeitsfeld einer Zylinderumströmung untersucht. Das Geschwindigkeitsfeld ist im Gebiet des Modells nach Abbildung 7.8 mit dem Geschwindigkeitsprofil nach Gleichung (7.3) initiiert, das in Zahlen mit $\bar{v}_x^{\max} = 15 \text{ m/s}$ beschrieben ist. Es ist mit einer konstanten Zeitschrittweite und Elementen für eine quadratische Approximation der Geschwindigkeiten mit symmetrischen Lagrange-Ansätzen berechnet.

Abbildung 3.32a zeigt, dass das Geschwindigkeitsfeld ausgeprägten Oszillationen unterworfen ist, wenn die Finite-Element-Formulierung nicht stabilisiert ist. In diesem Fall ist in einer Vielzahl an Elementen die Courant-Zahl $C > 1$, so dass sich materielle Punkte innerhalb einer Zeitscheibe mitunter durch mehrere Elemente bewegen. Ist die Finite-Element-Formulierung mit Gleichung (3.65) stabilisiert, ist hingegen eine physikalisch sinnvolle Näherungslösung berechnet (siehe Abbildung 3.32b).

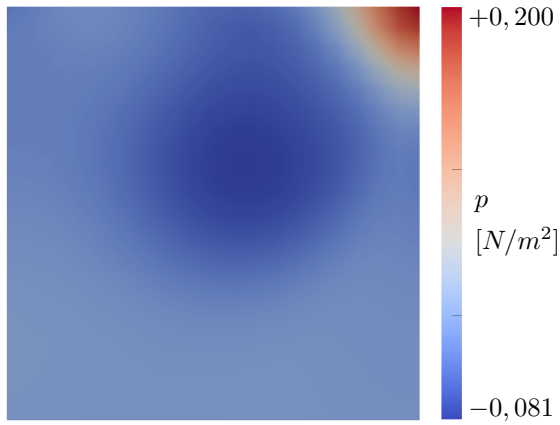
Mit dem entwickelten Finite-Elemente-Programm ist die Zeitschrittweite nicht adaptiv auf Grundlage der aktuellen Courant-Zahlen in den Elementen angepasst, so dass mit dem Ziel eines möglichst stabilen Lösungsverhaltens auch die Entleerung von Silos stets mit einer SUPG-Stabilisierung berechnet wird.



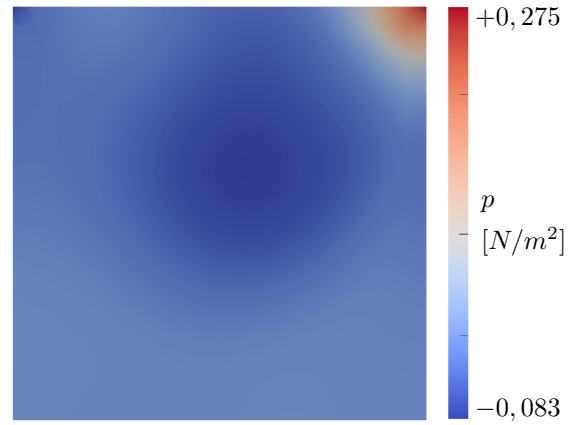
(a) V8P8 mit SUPG-, Kont.- und 0,01-facher PSPG-Stabilisierung



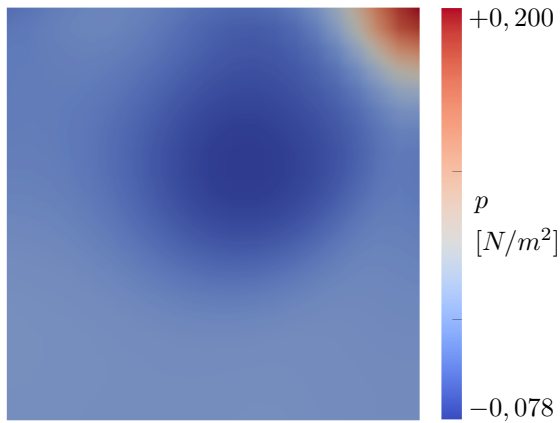
(b) V20P8 ohne PSPG-Stabilisierung



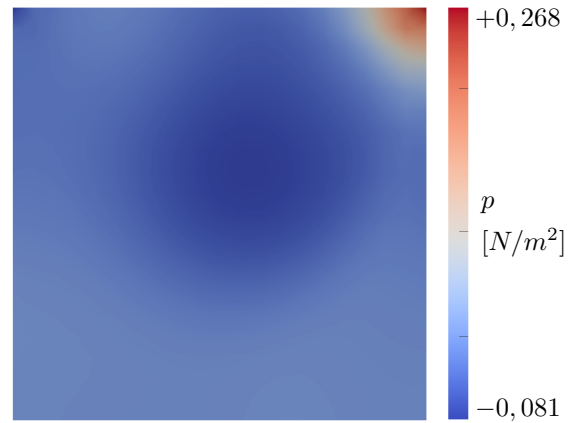
(c) V8P8 mit voller Stabilisierung



(d) V27P8 ohne PSPG-Stabilisierung



(e) V8P8 ohne Kont.-Stabilisierung



(f) V27P8 ohne PSPG- und Kont.-Stabilisierung

Abbildung 3.31: Druckfelder - quasi-stationäre Lösung

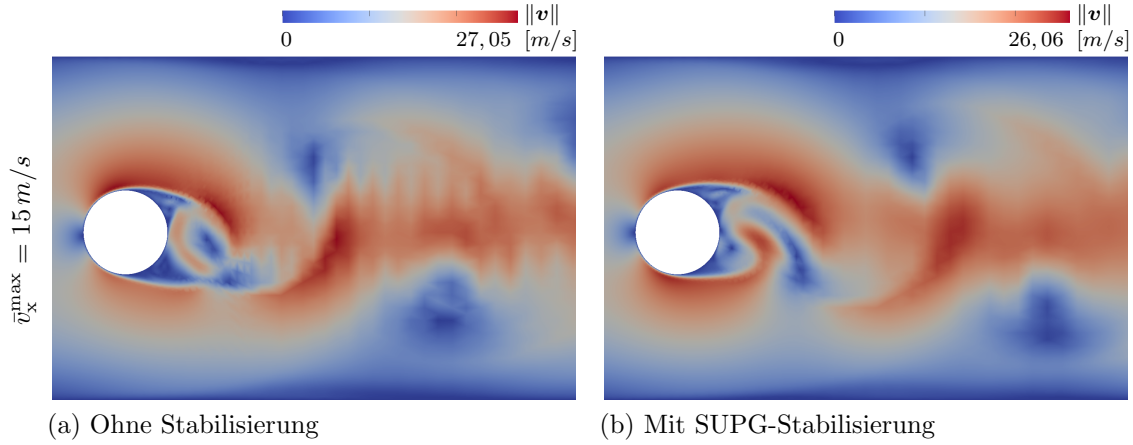


Abbildung 3.32: Geschwindigkeitsfelder zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$

3.2.2.3 Netzbewegung

Wirkt die Spannung im Fluid auf eine randgekoppelte Struktur, verformt sich diese infolge ihrer Nachgiebigkeit. Die Verformung der nachgiebigen Struktur verändert die Form des Gebietes, das vom Fluid durchströmt ist. Mit der Veränderung des Fluidgebietes verändert auch der Beobachter seine Position im Zeitverlauf, so dass die Mechanik des Fluids in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten \mathbf{v} des Beobachters auf Grundlage der Fundamentalgleichung (2.7) mit der *ALE*-Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{g} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (3.81a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.81b)$$

beschrieben ist. Nachfolgend ist gezeigt, dass mit der Auswertung der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung in einem sich räumlich verändernden Gebiet die Geschwindigkeiten des Beobachters implizit berücksichtigt sind, so dass mit den Raum-Zeit-Integralen zugleich die Modellgleichungen des Fluids in *ALE*-Formulierung in schwacher Form beschrieben sind.

Sind die schwachen Formen (3.65) und (3.66) in einem zeitkonstanten Gebiet mit Raum-Zeit-Elementen ausgewertet, ist deren Jakobimatrix allein mit den partiellen Ableitungen $\partial \mathbf{x} / \partial \boldsymbol{\xi}$ und $\partial t / \partial \tau$ bestimmt. Verändert sich zusammen mit dem Raum-Zeit-Gebiet hingegen die Geometrie der Elemente, ist die Jakobimatrix durch die partiellen Ableitungen $\partial \mathbf{x} / \partial \tau$ erweitert. Mit dem in Abbildung 3.1a dargestellten Finite-Elemente-Netz ist die Lage der Finite-Element-Knoten entlang der Zeitachse mit der Zeit zu Beginn und zum Ende eines jeden Zeitschrittes festgelegt. Damit sind die partiellen Ableitungen $\partial t / \partial \boldsymbol{\xi}$ identisch null, wenn auch die veränderte Elementgeometrie bei der Berechnung der Jakobimatrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \boldsymbol{\xi}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial \tau} & \frac{\partial t(\tau)}{\partial \tau} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

berücksichtigt ist. Mit der Eigenschaft, dass das totale Differential

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} dt \quad (3.83)$$

konstant null ist, kann die partielle Zeitableitung

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \quad (3.84)$$

der lokalen Koordinaten alternativ mit deren räumlichen Ableitungen und den Geschwindigkeiten des Beobachters formuliert werden. Mit der Invertierung der Jakobimatrix

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} & \frac{2}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

ist die partielle Zeitableitung der Geschwindigkeiten eines materiellen Punktes mit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \quad (3.86a)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} \frac{2}{\Delta t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3.86b)$$

beschrieben. Der zweite Term in Gleichung (3.86b) zeigt, dass mit der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung die Geschwindigkeiten des Beobachters über das Raum-Zeit Integral implizit erfasst und im konvektiven Term der materiellen Zeitableitung nicht explizit zu berücksichtigen sind (vergleiche BEHR [5]).

Die Bewegung des Beobachters folgt mit der Verformung des Finite-Elemente-Netzes im Gebiet des Fluids. Die Verformung des Finite-Elemente-Netzes ist mit einer Pseudo-Struktur beschrieben, die die Verschiebungen der nachgiebigen Struktur entlang des gemeinsamen Randes adaptiert (siehe Abbildung 3.33). Auch die Bewegung der Pseudo-Struktur ist mit Raum-Zeit-Elementen beschrieben, bis hin zu einer konsistenten Methode für die Berechnung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen.

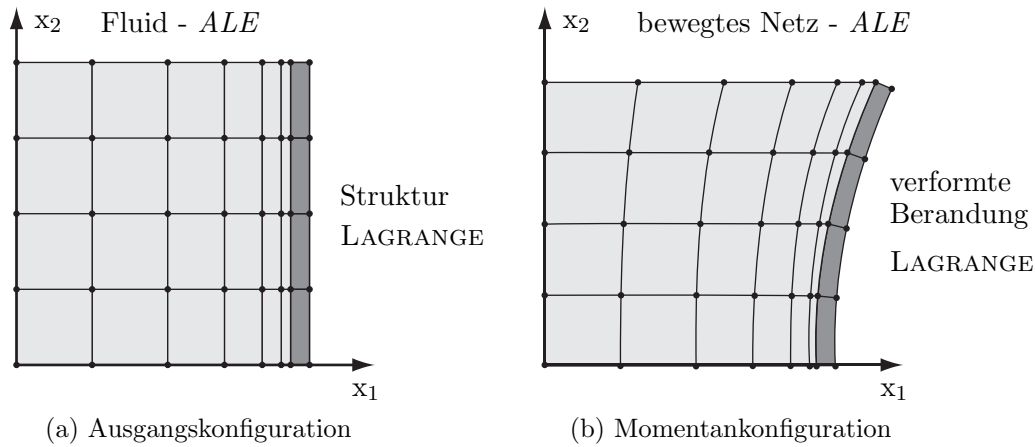


Abbildung 3.33: Netzbewegung

Eine gute Näherungslösung ist berechnet, wenn bei gegebener Anzahl an Freiheitsgraden die schwachen Formen der Erhaltungsgleichungen mit Elementen ausgewertet sind, deren Flächen im rechten Winkel zueinander stehen. Mit dem Ziel die Form der Elemente auch für große Deformationen der angrenzenden Struktur weitgehend aufrecht zu erhalten, ist die Kinematik der Pseudo-Struktur für große Rotationen und deren Flexibilität mit dem elastischen Potential

$$\Psi_{\text{el}} = \frac{\mu_L}{2} (I_1^{\mathbf{C}} - 3) - \mu_L \ln(J) + \frac{\lambda_L}{2} (\ln(J))^2 \quad \text{mit} \quad J^2 = I_3(\mathbf{C}) \quad (3.87)$$

eines kompressiblen Neo-Hooke-Materials beschrieben. Mit dem von BONET [7] angegebenen elastischen Potential ist die Flexibilität der Struktur mit $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ nicht-linear vom Deformationsgradienten abhängig. Es berücksichtigt die bei Druckbeanspruchungen überproportionale Versteifung von Neo-Hooke-Materialien, so dass sich die Steifigkeit im Element erhöht, wenn sich die gegenüberliegenden Seiten annähern (vergleiche Abbildung 7.22b mit 7.22c). In Bezug auf mögliche Verformungszustände der Elemente ist zu beachten, dass die Schubverzerrungen umso kleiner sind, je kleiner der Wert der zweiten Lamé-Konstante μ_L ist.

3.2.2.4 Linearisierung

Die Anwendung des Newton-Raphson-Verfahrens erfordert bei Fluid-Struktur-Wechselwirkungen neben der Linearisierung der Residuen des Fluids nach den Freiwerten der Geschwindigkeiten und des Drucks oder der Dichte für eine quadratische Konvergenz auch deren Linearisierung nach den Geschwindigkeiten des Beobachters an den Knoten des Finite-Elemente-Netzes. Sie verändern mit den Verschiebungen d_i die Position der Elemente so, dass das Gebiet des Fluids die verformte Struktur konform adaptiert. Dabei sind dem isoparametrischen Konzept folgend die Verschiebungen mit dem gleichen Ansatz beschrieben wie die Geometrie der Elemente. Die Linearisierung ist anstelle der Geschwindigkeiten des Beobachters alternativ für dessen

Verschiebungen gezeigt, die mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}$ sowohl die Transformation des Raum-Zeit-Integrals als auch die Transformation der partiellen Ableitungen beeinflussen. Mit der Determinate der Jakobimatrix ist das Raum-Zeit-Integral

$$\iiint\!\!\!\int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 = \iiint\!\!\!\int |\det(\mathbf{J}_e)| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \quad (3.88)$$

für $\mathbf{x}_4 = t$ und $\xi_4 = \tau$ in das lokale Koordinatensystem des Referenzelementes transformiert. Die partiellen Ableitungen der Formfunktion $N(\xi_i)$ nach den globalen Koordinaten \mathbf{x}_i , sind mit der Transformationsvorschrift

$$\frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}_i} = J_{ij}^{-1} \frac{\partial N}{\partial \xi_j} \quad \text{mit} \quad J_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial \xi_i} \quad (3.89)$$

gegeben. Sie ist zugleich ein Bestandteil der Transformationsvorschrift

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} = J_{ik}^{-1} J_{jl}^{-1} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial \xi_k \partial \xi_l} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}_o}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{x}_o} \right) \quad (3.90)$$

für die zweiten partiellen Ableitungen, mit denen unter anderem die Divergenz des Spannungstensors in der Stabilisierung der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung des Fluids ausgewertet ist (siehe Gleichung (3.75)). Für die Umsetzung der Transformationsvorschriften in einem Finite-Elemente-Programm ist Gleichung (3.90) in Anhang A.1 alternativ in Voigtscher Notation angegeben. Der Einfluss linearer Ansätze auf die zweite Ableitung $N_{,x_i x_j}$ ist mit den Abbildungen 3.34a und 3.34b verdeutlicht.

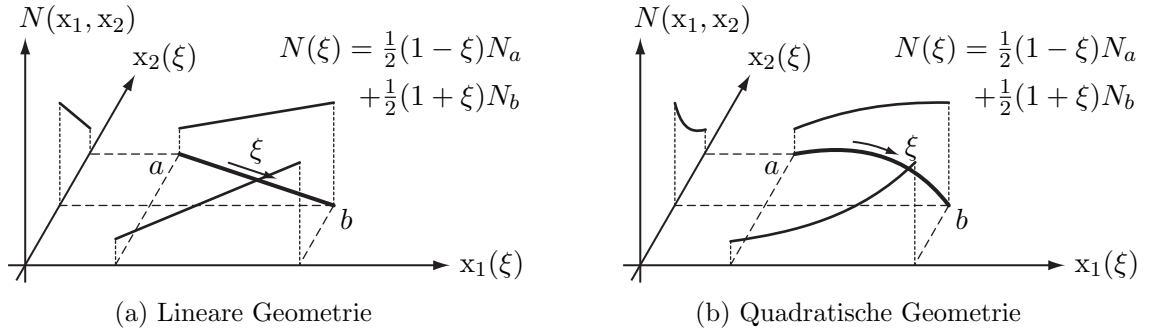


Abbildung 3.34: Globale Ableitungen linearer Ansatzfunktionen

Sie zeigen lineare Funktionen, die entlang einer geraden beziehungsweise gekrümmten Linie im zweidimensionalen Raum verlaufen. Während sich deren Abbildungen im globalen Koordinatensystem im Fall der geraden Linie weiterhin mit linearen Funktionen darstellen, verlaufen die Funktionen quadratisch, wenn die Linie gekrümmt ist, so dass deren zweite Ableitungen $N_{,x_1 x_1}$ und $N_{,x_2 x_2}$ ungleich null sind. Die Linearisierung der Residuen des Fluids nach den Verschiebungen der Finite-Element-Knoten ist nachfolgend sowohl für eine elementweise lineare als auch quadratische Approximation des zeitveränderlichen Gebietes beschrieben. Unabhängig von der Ordnung der Polynomansätze, mit denen die Geometrie der Elemente beschrieben ist, ist die Determinante der Jakobimatrix in der Abbildung zwischen den Raum-Zeit-Integralen mit

$$\frac{\partial \det(\mathbf{J})}{\partial d_i} dd_i = \det(\mathbf{J}) J_{ij}^{-1} dd_{i,\xi_j} \quad (3.91)$$

für die Berechnung des Zuwuchses dd_i in den Verschiebungen linearisiert. Neben der Linearisierung der Determinate der Jakobimatrix, ist die veränderliche Geometrie auch im Bezug auf die ersten partiellen Ableitungen der Ansätze bezüglich des globalen Koordinatensystems mit

$$\frac{\partial N_{,x_i}}{\partial d_n} dd_n = -J_{ik}^{-1} J_{nj}^{-1} N_{,\xi_j} dd_{n,\xi_k} \quad (3.92)$$

berücksichtigt. Sowohl bei einer quadratischen Approximation der Geschwindigkeiten als auch der Geometrie der Elemente ist mithilfe von

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{,x_i x_j}}{\partial d_n} dd_n = & - \left(J_{ik}^{-1} J_{nq}^{-1} J_{jl}^{-1} + J_{jk}^{-1} J_{nl}^{-1} J_{iq}^{-1} \right) \left(N_{,\xi_q \xi_l} - x_{o,\xi_q \xi_l} J_{op}^{-1} N_{,\xi_p} \right) dd_{n,\xi_k} \\ & - J_{iq}^{-1} J_{jl}^{-1} J_{np}^{-1} N_{,\xi_p} \left(dd_{n,\xi_q \xi_l} - J_{ok}^{-1} x_{o,\xi_q \xi_l} dd_{n,\xi_k} \right) \end{aligned} \quad (3.93)$$

der Satz der erforderlichen Linearisierungen vervollständigt.

Sowie die Modellgleichungen der realen Struktur für die Berechnung großer Rotationen zu linearisieren sind, ist auch der Green'sche Verzerrungsgeschwindigkeits-tensor der Pseudo-Struktur für Neo-Hooke-Materiale zu linearisieren. Die Linearisierung des Green'schen Verzerrungstensors ist BELYTSCHKO [6] zu entnehmen und auf die Verzerrungsgeschwindigkeiten der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung zu übertragen. Hingegen ist die Linearisierung des Flexibilitätstensors, der in Form des Elastizitätstensors mit dessen Komponenten

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda_L C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + 2(\mu_L - \lambda_L \ln(J)) C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} \quad (3.94)$$

in der Weggrößenformulierung der Arbeitsgleichung (7.1) bereits die Linearisierung des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors nach dem Green'schen Verzerrungstensor darstellt, nachfolgend näher beschrieben. Die Besonderheit liegt dabei in der Ableitung der Komponenten des vierstufigen Flexibilitätstensors \mathbb{F} nach den Komponenten des Elastizitätstensors \mathbb{C} , mit denen die konstitutiven Beziehungen

$$E_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}^{-1} S_{kl} \quad \text{und} \quad S_{kl} = \mathbb{C}_{klmn} E_{mn} \quad (3.95)$$

definiert sind. Mit der Substitution der Komponenten des Spannungstensors

$$E_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}^{-1} \mathbb{C}_{klmn} E_{mn} \quad (3.96)$$

und der Identität zwischen den Verzerrungen

$$E_{ij} = \delta_{im} \delta_{jn} E_{mn} \quad (3.97)$$

ist das totale Differential

$$\frac{\partial \mathbb{C}_{ijkl}^{-1}}{\partial \mathbb{C}_{rstu}} \mathbb{C}_{klmn} + \mathbb{C}_{ijkl}^{-1} \frac{\partial \mathbb{C}_{klmn}}{\partial \mathbb{C}_{rstu}} = 0 \quad (3.98)$$

gegeben. Mit den Umformungen

$$\frac{\partial \mathbb{C}_{ijkl}^{-1}}{\partial \mathbb{C}_{rstu}} \mathbb{C}_{klmn} + \mathbb{C}_{ijrs}^{-1} \delta_{mt} \delta_{nu} = 0 \quad (3.99a)$$

$$\frac{\partial \mathbb{C}_{ijkl}^{-1}}{\partial \mathbb{C}_{rstu}} \mathbb{C}_{klmn} \mathbb{C}_{mnvw}^{-1} + \mathbb{C}_{ijrs}^{-1} \mathbb{C}_{mnvw}^{-1} \delta_{mt} \delta_{nu} = 0 \quad (3.99b)$$

$$\frac{\partial \mathbb{C}_{ijkl}^{-1}}{\partial \mathbb{C}_{rstu}} \delta_{kv} \delta_{lw} + \mathbb{C}_{ijrs}^{-1} \mathbb{C}_{mnvw}^{-1} \delta_{mt} \delta_{nu} = 0 \quad (3.99c)$$

folgt die Ableitung der Komponenten des Flexibilitätstensors mit

$$\frac{\partial \mathbb{C}_{ijvw}^{-1}}{\partial \mathbb{C}_{rstu}} = -\mathbb{C}_{ijrs}^{-1} \mathbb{C}_{tuvw}^{-1} \quad (3.100)$$

nach den Komponenten des Elastizitätstensors. Die Ableitung

$$\frac{\partial C_{ij}^{-1}}{\partial C_{kl}} = -C_{ik}^{-1} C_{lj}^{-1} \quad (3.101)$$

ist mit demselben Schema bestimmt, so dass die Komponenten des Flexibilitätstensors mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{C}_{ijkl}^{-1}}{\partial C_{st}} = & 4 (\mu_L - \lambda_L \ln(J)) (\mathbb{C}_{ijef}^{-1} \mathbb{C}_{ghkl}^{-1} C_{eg}^{-1} C_{hs}^{-1} C_{tf}^{-1}) \\ & + \lambda_L (\mathbb{C}_{ijef}^{-1} \mathbb{C}_{ghkl}^{-1} C_{st}^{-1} C_{eg}^{-1} C_{hf}^{-1} + \mathbb{C}_{ijef}^{-1} \mathbb{C}_{ghkl}^{-1} C_{gh}^{-1} C_{es}^{-1} C_{tf}^{-1} + \mathbb{C}_{ijef}^{-1} \mathbb{C}_{ghkl}^{-1} C_{ef}^{-1} C_{gs}^{-1} C_{th}^{-1}) \end{aligned} \quad (3.102)$$

nach den Komponenten des rechten Cauchy-Green-Tensors unter Berücksichtigung der Symmetrie der Tensoren abgeleitet sind. Die Zuwüchse $d\mathbf{u}$ in den Verschiebungen sind mit

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} = 2 \operatorname{sym}(\mathbf{F}^T \nabla_0(d\mathbf{u})) \quad (3.103)$$

gegeben. Gleichung (3.103) ist mit der Ableitung der Komponenten des Cauchy-Green-Tensors

$$\frac{\partial C_{st}}{\partial F_{ab}} = \delta_{ta} \delta_{sb} F_{st} + \delta_{sa} \delta_{tb} F_{ts} \quad (3.104)$$

nach den Komponenten des Deformationsgradienten und dessen Gâteaux-Ableitung

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} = \left. \frac{\partial(1 + \nabla_0(\mathbf{u} + \zeta d\mathbf{u}))}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \nabla_0(d\mathbf{u}) \quad (3.105)$$

bezüglich der Verschiebungen hergeleitet.

3.2.3 Kopplungen

Das mechanische Verhalten des Schüttgutes ist alternativ mit der Strömung eines Fluids oder der Verformung einer Struktur für viskoplastische Flüssigkeiten beziehungsweise Festkörper beschrieben. So ist die Übergangsbedingung zwischen dem Schüttgut und der umschließenden Siloschale unter Berücksichtigung der Wandreibung sowohl für eine Fluid-Struktur-Kopplung als auch für eine Struktur-Struktur-Kopplung in schwacher Form nachfolgend angegeben.

Fluid-Struktur-Kopplung

Die Abbildung von laminaren Grenzschichtströmungen in Modellen der Fluid-Struktur-Wechselwirkung erfordert die Definition der Haftbedingung nach Gleichung (2.48) und (2.49). Sie ist mit den Integralen

$$+ \int_{P_n^K} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) dP^K + \int_{P_n^K} \delta \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{t} dP^K \quad (3.106)$$

und

$$- \int_{P_{0,n}^K} \delta \mathbf{v}^S \cdot \left(\mathbf{t} \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} \right) dP_0^K \quad (3.107)$$

in schwacher Form beschrieben. Mit dem ersten Integral in Zeile (3.106) sind die Geschwindigkeiten des Fluids und der Struktur entlang des gemeinsamen Raum-Zeit-Randes kinematisch gekoppelt. Neben der kinematischen Kopplung, die in Form einer Nebenbedingung die Finite-Element-Formulierung des Fluids erweitert, ist mit dem zweiten Integral in Zeile (3.106) die Arbeitsgleichung um die Wirkung der Interaktionsspannungen \mathbf{t} ergänzt. Die schwache Form des Gleichgewichts zwischen den Gebieten ist mit dem Integral in Zeile (3.107) hergestellt. Es ist abweichend von der Momentankonfiguration über die Ausgangskonfiguration des Raum-Zeit-Randes formuliert und erweitert die Arbeitsgleichung der Struktur. Der Zusammenhang zwischen Momentan- und Ausgangskonfiguration des räumlichen Randes Γ , der mit der Zeit den Raum-Zeit-Rand $P = \Gamma \times t$ aufspannt, ist mit der Transformation des Spannungsvektors

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{t} \frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} = \mathbf{t} \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \quad (3.108)$$

gegeben (vergleiche BONET [7]). Mit der schwachen Formulierung der Haftbedingung sind Interaktionsspannungen zu beschreiben, die bei einer Diskretisierung entsprechend den Geschwindigkeiten des Fluids und der Struktur deren Geschwindigkeitsfelder entlang des Raum-Zeit-Randes P^K exakt aufeinander abbilden (vergleiche HÜBNER [34]). Aus diesem Grund ist mit dem entwickelten Finite-Elemente-Programm gleich eine starke Kopplung der Geschwindigkeitsfreiwerte \hat{v}_i an Finite-Element-Knoten gleicher Koordinaten umgesetzt, bis hin zu einer Systemmatrix,

deren Hauptdiagonalelemente vollständig besetzt sind (vergleiche Abbildung 6.2). Mit der starken Kopplung ist weiterhin berücksichtigt, dass sowohl die Mechanik des Fluids als auch die Mechanik der Struktur mit Geschwindigkeiten als primäre Beschreibungsvariablen formuliert sind.

Für die numerische Analyse der Entleerung von Silos ist das Strömungsverhalten des Fluids entlang der Siloschale mit dem Reibmodell nach Gleichung (2.50) bis (2.56) beschrieben. Mit den unterschiedlichen kinematischen Bedingungen, normal zum deformierten Rand und in Strömungsrichtung des Fluids, sind die Geschwindigkeiten entsprechend zu koppeln. Aus diesem Grund ist die Arbeitsgleichung des Fluids mit dem Reibmodell in der schwachen Form

$$+ \int_{P_n^K} \delta t_n (\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) \cdot \mathbf{n} dP^K \quad (3.109a)$$

$$+ \int_{P_n^K} \delta t_l ((\mathbf{v}^F - \mathbf{v}^S) \cdot \mathbf{l} - |\Delta v_l| \operatorname{sgn}(t_l)) dP^K \quad (3.109b)$$

$$+ \int_{P_n^K} \delta \Delta v_l (|t_l| - \langle -t_n \rangle \mu (1 - e^{-\alpha |\Delta v_l|})) dP^K \quad (3.109c)$$

$$+ \int_{P_n^K} \delta \mathbf{v}^F \cdot \mathbf{t} dP^K \quad (3.109d)$$

erweitert. Die projizierten Geschwindigkeiten sind in den kinematischen Bedingungen in Zeile (3.109a) und (3.109b) mit der Normalspannung t_n und der Schubspannung t_l leistungskonform gewichtet, die konstitutive Beziehung in Zeile (3.109c) ist mit der Differenzgeschwindigkeit Δv_l im Integral formuliert. Das Gleichgewicht zwischen den Gebieten ist entsprechend der schwachen Form der Haftbedingung mit den Interaktionsspannungen $\mathbf{t} = t_n \mathbf{n} + t_l \mathbf{l}$ über den Raum-Zeit-Rand ausgewertet. Mit den Vorzeichen der entsprechenden Arbeitsterme in Zeile (3.107) und (3.109d) ist der Normalenvektor \mathbf{n} stets mit gleicher Richtung angesetzt, so dass er nur bezüglich eines Gebietes nach außen gerichtet ist. Gleiches gilt für die Strömungsrichtung \mathbf{l} , die nach Gleichung (2.51) mit den Relativgeschwindigkeiten zwischen Fluid und Struktur festgelegt ist. Im Vergleich zu den starken Formen des Reibmodells ist mit den Betrags- und Vorzeichenfunktionen in den Arbeitsintegralen berücksichtigt, dass die Schubspannung innerhalb der Newton-Raphson-Iteration negative Werte annehmen kann. Für glatte Oberflächen ist der Einfluss der Reibung mit $\alpha = 0$ vernachlässigt und mit dem Integral in Zeile (3.109a) sichergestellt, dass sich die zu koppelnden Gebiete, über den Raum-Zeit-Rand betrachtet, nicht durchdringen.

Die schwache Form des Reibmodells ist mit Interface-Elementen diskretisiert, die sich zu einem diskreten Zeitpunkt in Form einer Fläche darstellen. Die Geometrie der Fläche ist in Abhängigkeit der Geometrie der zu koppelnden Fluid- und Strukturelemente alternativ mit einem bilinearen oder einem biquadratischen Lagrange-Ansatz beschrieben. Aufgrund des jeweils symmetrischen Lagrange-Ansatzes ist die Fläche zu diskreten Zeitpunkten im Allgemeinen gekrümmt, so dass deren Inhalt für die

Auswertung des Raum-Zeit-Integrals

$$\int dP = \iint d\Gamma dt \quad \text{mit} \quad \int d\Gamma \approx \sum_{j=1}^{|w|} \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial \xi_2} \right\| \right) \bigg|_{\xi_{1j}, \xi_{2j}} w_j \quad (3.110)$$

näherungsweise mit der Quadratur nach Gauß bestimmt ist. Der Bezug zwischen einem gekrümmten Element und dessen Referenzelement in Form eines Quadrates ist mit den Längen der Vektoren hergestellt, die an den Integrationspunkten ausgewertet und mit dem Kreuzprodukt der Basisvektoren $\partial \mathbf{x} / \partial \xi_1$ und $\partial \mathbf{x} / \partial \xi_2$ bestimmt sind (vergleiche KLINGBEIL [38]). Mit dem Einheitsvektor des Kreuzproduktes ist die Flächennormale \mathbf{n} bestimmt, mit der die Geschwindigkeiten der Struktur und des Fluids nach Gleichung (3.109a) gekoppelt sind (siehe Abbildung 3.35).

Normalspannung, Schubspannung und Differenzgeschwindigkeit sind mit symmetrischen Lagrange-Ansätzen innerhalb einer Raum-Zeit-Scheibe stetig angenähert. Während Gleichung (3.109a) mit der Quadratur nach Gauß ausgewertet ist, sind davon abweichend die Residuen bezüglich der Schubspannung und der Differenzgeschwindigkeit nach Gleichung (3.109b) und (3.109c) mit der Quadratur nach Lobatto entkoppelt. Damit ist sichergestellt, dass die Näherungslösung frei von Oszillationen im räumlichen Verlauf ist.

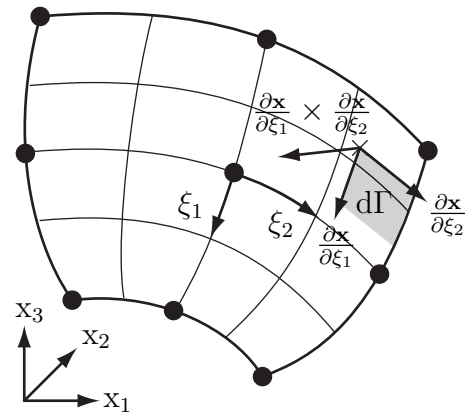


Abbildung 3.35: Gekrümmte Fläche

Struktur-Struktur-Kopplung

Als Knoten zu Knoten sind auch die Gebiete zweier Strukturen gekoppelt. Die Kopplung erfolgt mit rheologischen Körpern nach Abbildung 3.36. Die Normalenrichtung ist mit der Geometrie der zu koppelnden Strukturen eindeutig festgelegt. Die Richtung des Vektors \mathbf{l}_1 , der die Kopplungsfläche Γ_0^C tangiert, ist hingegen beliebig.

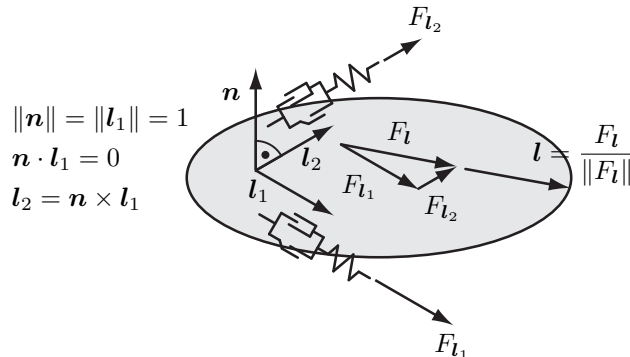


Abbildung 3.36: Rheologischer Körper

Er approximiert zusammen mit dem Vektor \mathbf{l}_2 die allgemein gekrümmte Fläche lokal mit einer Ebene. Der Vektor \mathbf{l}_2 ist mit dem Kreuzprodukt $\mathbf{n} \times \mathbf{l}_1$ bestimmt, so dass die resultierende Kraft in der Kopplungsebene mit

$$F_l = \sqrt{F_{l_1}^2 + F_{l_2}^2} \quad (3.111)$$

bestimmt ist. Sie definiert nach Gleichung (3.36) zugleich die Richtung der viskoplastischen Relativgeschwindigkeit

$$\Delta v_l^{\text{vp}} = \left\langle \frac{F_l - \langle -\mu F_n \rangle}{dA} \right\rangle^n. \quad (3.112)$$

Die Einflussfläche

$$A = \int N d\Gamma_0 \quad (3.113)$$

eines jeden rheologischen Körpers ist mit der Formfunktion der zu koppelnden Geschwindigkeitsfreiwerte bestimmt und dessen Verformungsverhalten mit der Arbeitsgleichung

$$\int \delta \mathbf{v}^{S_1} \cdot \left(F_n \mathbf{n} + \sum_{i=1}^2 F_{l_i} \mathbf{l}_i \right) dt - \int \delta \mathbf{v}^{S_2} \cdot \left(F_n \mathbf{n} + \sum_{i=1}^2 F_{l_i} \mathbf{l}_i \right) dt \quad (3.114a)$$

$$+ \int \delta F_n \left(\frac{(1 + \Delta u_n / l_n)^4}{k_{b_n} A} \dot{F}_n - (\mathbf{v}^{S_1} - \mathbf{v}^{S_2}) \cdot \mathbf{n} \right) dt \quad (3.114b)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int \delta F_{l_i} \left(\frac{1}{k_{b_{l_i}} A} \dot{F}_{l_i} + \Delta v_l^{\text{vp}} \frac{F_{l_i}}{F_l} - (\mathbf{v}^{S_1} - \mathbf{v}^{S_2}) \cdot \mathbf{l}_i \right) dt \quad (3.114c)$$

$$+ \delta F_n(t_n^+) \frac{(1 + \Delta u_n(t_n) / l_n)^4}{k_{b_n} A} (F_n(t_n^+) - F_n(t_n^-)) \quad (3.114d)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \delta F_{l_i}(t_n^+) \frac{1}{k_{b_{l_i}} A} (F_{l_i}(t_n^+) - F_{l_i}(t_n^-)) \quad (3.114e)$$

in schwacher Form beschrieben. Sie stimmt mit der schwachen Form der Modellgleichungen (2.57) bis (2.65) überein, wenn sich die Strukturen nur gering gegeneinander verschieben und die Verzerrungen entlang der zu koppelnden Ränder klein sind. In diesem Fall sind die Spannungsmaße der Referenz- und Momentankonfiguration identisch. Auf eine Indizierung der Vektoren bezüglich ihrer Referenzkonfiguration wird zu Gunsten einer übersichtlichen Darstellung der Arbeitsgleichung verzichtet. Sie entspricht formal der Arbeitsgleichung (3.26) der zu koppelnden Strukturen. So wie die Spannungsfreiwerte der diskretisierten Finite-Element-Formulierung nach Gleichung (3.47) statisch kondensiert sind, so sind auch die Freiwerte der Kräfte in den Komponenten des rheologischen Körpers auf die Geschwindigkeitsfreiwerte der Strukturen abgelöst.

4 Angereicherte Elemente

Die kontinuumsmechanische Modellierung von Strukturen und Fluiden geht von zusammenhängenden Gebieten aus und setzt damit stetige Verläufe für die Zustandsgrößen voraus. Werden die Modellgleichungen mit der Finite-Elemente-Methode näherungsweise gelöst, erfolgt die Approximation der Weggrößen polygonartig über das gesamte Gebiet und mittels polynominaler Ansätze in den Elementen.

Für die Berechnung von Zwei-Fluid-Strömungen sind Knicke im Geschwindigkeitsfeld und durch Oberflächenspannungen bedingte Sprünge im Druckfeld am Übergang zwischen den Gebieten abzubilden. Verläuft die Grenze zwischen den Gebieten innerhalb von Elementen, sind deren stetige Ansätze um diskontinuierliche Ansätze für die Approximation der Beschreibungsvariablen zu erweitern. Mit der Anreicherung der Ansätze kann auch das Verformungsverhalten nachgiebiger Strukturen mit beliebig berandeten Einschlüssen untersucht werden (vergleiche KÖLKE [41]).

Es wird zwischen starken und schwachen Diskontinuitäten unterschieden. Eine schwache Diskontinuität ist mit einem stetigen, aber nicht stetig differenzierbaren Verlauf einer Zustandsgröße charakterisiert. Weist der Verlauf einer Zustandsgröße einen Sprung auf, liegt eine starke Diskontinuität vor, die mit einer nicht stetigen Funktion zu beschreiben ist. Neben der Wahl geeigneter Ansätze für die Abbildung von Diskontinuitäten ist mit Anwendung der *XFEM* auch die Lage der Integrationspunkte in Elementen zu bestimmen, die mehrere Gebiete unterschiedlicher materieller Körper umfassen.

Im folgenden Kapitel sind die verwendeten Anreicherungen definiert und die numerische Integration über Teilgebiete innerhalb von Elementen beschrieben. Die Lage und Wichtung der Integrationspunkte ist mit Integrationsformeln für vierdimensionale Simplexe und einem Algorithmus für die Parkettierung von Raum-Zeit-Elementen bestimmt. Mit dem Algorithmus ist auch die Methodik für die Adaptation gekrümmter Gebietsränder dargestellt. Mit der analytischen Lösung für das Eshelby-Problem ist die Implementierung der *XFEM* an einem Modell für einen kugelförmigen Einschluss verifiziert.

4.1 Anreicherungen

Die Berechnung von inkompressiblen Zwei-Fluid-Strömungen mit freier Oberfläche erfordert angereicherte Ansätze für die Abbildung von Diskontinuitäten im Druck- und Geschwindigkeitsfeld. Mit der modifizierten abs-Anreicherung

$$M_j^{\text{abs}} = N_j(\mathbf{x}, t) R(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

nach MOES [47] ist der erweiterte Ansatz

$$v_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}_{\text{std}}} N_k(\mathbf{x}, t) \hat{v}_k + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{ext}}} M_j^{\text{abs}}(\mathbf{x}, t) \tilde{v}_j \quad (4.2)$$

für die Abbildung von Knicken im Geschwindigkeitsfeld formuliert. Sie ist mit den Lagrange-Polynomen N_j und der Knickfunktion

$$R(\mathbf{x}, t) = \sum_{n \in \mathcal{N}_{\text{ext}}} N_n(\mathbf{x}, t) |\hat{\phi}_n| - \left| \sum_{n \in \mathcal{N}_{\text{ext}}} N_n(\mathbf{x}, t) \hat{\phi}_n \right| \quad (4.3)$$

definiert, die die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \pm \min (\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)^O\|) \quad (4.4)$$

enthält. Sie beschreibt den kürzesten Abstand eines jeden materiellen Punktes zu der Oberfläche zwischen den Gebieten, die mit O indiziert ist. Eine Darstellung der Abstandsfunktion für einen kreisförmigen Einschluss ist Abbildung 5.3a zu entnehmen. Mit der modifizierten abs-Anreicherung sind schwache Diskontinuitäten im Lösungsverlauf oszillationsfrei abgebildet, so dass eine zusätzliche Anreicherung benachbarter Elemente nach der *corrected XFEM* [26] nicht erforderlich ist (vergleiche CHENG [13]). Weiterhin ist die Stetigkeit im Geschwindigkeitsfeld bereits mit den Formfunktionen nach Gleichung (4.1) in starker Form erfüllt und eine Formulierung zusätzlicher Übergangsbedingungen nicht erforderlich (vergleiche KÖLKE [41]). Obwohl der Einfluss von Oberflächenspannungen mit den Modellgleichungen nach Kapitel 8.1 vernachlässigt ist, ist mit dem Ziel abgestimmter Ansätze auch der Lagrange-Ansatz für das Druckfeld angereichert. Der erweiterte Ansatz für den Druck

$$p_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}_{\text{std}}} N_k(\mathbf{x}, t) \hat{p}_k + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{ext}}} M_j^{\text{sgn}}(\mathbf{x}, t) \tilde{p}_j \quad (4.5)$$

wird mit der normierten sgn-Anreicherung

$$M_j^{\text{sgn}} = N_j(\mathbf{x}, t) \psi_j^{\text{sgn}}(\mathbf{x}, t) \quad (4.6)$$

$$\text{mit } \psi_j^{\text{sgn}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \text{sgn}(\phi(\mathbf{x}, t)) \cdot \text{sgn}(\hat{\phi}(\mathbf{x}_j, t_j)) \right)$$

für die Abbildung von starken Diskontinuitäten im Lösungsverlauf gewählt.

Der Verlauf der Anreicherungen ist für den eindimensionalen Raum in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Verläufe verdeutlichen, dass die Freiwerte der Anreicherungsfunktionen \tilde{v}_j und \tilde{p}_j nicht unmittelbar materiellen Punkten innerhalb des jeweiligen Elementes zugeordnet werden können.

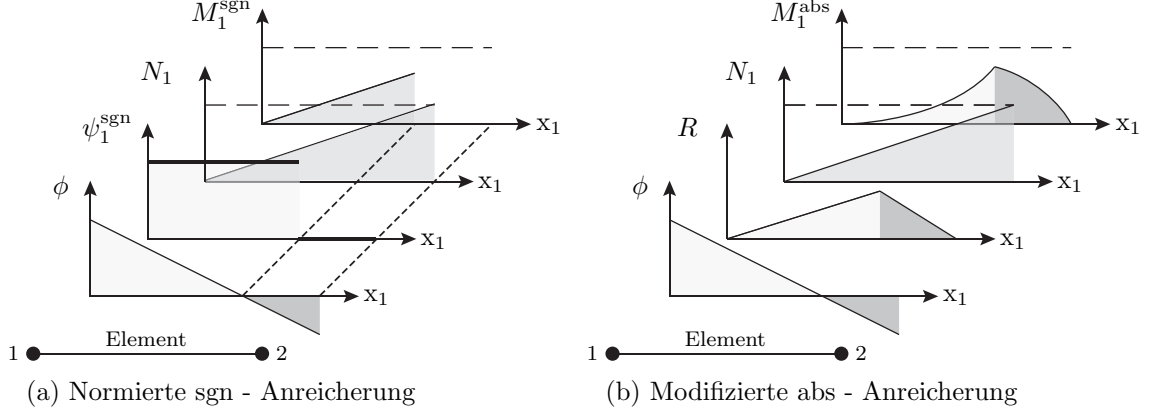


Abbildung 4.1: Anreicherungen

So ist insbesondere der Freiwert der normierten sgn-Anreicherung mit dem Lagrange-Polynom dem Finite-Element-Knoten im gegenüberliegenden Teilgebiet zugeordnet (siehe Abbildung 4.1a). Im Fall der normierten sgn-Anreicherung ist die Einheit der Freiwerte mit der Einheit der angereicherten Zustandsgröße festgelegt. Hingegen sind nach Abbildung 4.1b die Formfunktionen der modifizierten abs-Anreicherung mit der Abstandsfunktion skaliert, so dass die Einheit ihrer Freiwerte nicht mit der Einheit der angereicherten Zustandsgröße übereinstimmt. Sowohl die Skalierung der Formfunktionen der modifizierten abs-Anreicherung als auch der Sachverhalt, dass sich der Wert des Integrals $\int M_1 dx_1$ umso mehr verringert, je näher der Nulldurchgang der Abstandsfunktion an dem ersten Finite-Element-Knoten liegt, bedingt eine unterschiedlich starke Wichtung der Residuen der diskretisierten Arbeitsgleichungen (3.65) und (3.77).

Neben der Berechnung von inkompressiblen Zwei-Fluid-Strömungen ist die *XFEM* auch für die Berechnung von Verformungen in randgekoppelten Strukturen mit unterschiedlichem Materialverhalten eingesetzt. Während die linearen Lagrange-Ansätze für die Geschwindigkeiten auch hier mit modifizierten abs-Anreicherungen nach Gleichung (4.1) erweitert sind, sind die Verläufe der Spannungen abweichend von Gleichung (3.42) in beiden Teilgebieten mit linearen Lagrange-Ansätzen nach Gleichung (3.41) angenähert (vergleiche ZILIAN [69]).

Für eine Auswertung der Arbeitsgleichungen sind die ersten Ableitungen der Formfunktionen der modifizierten abs-Anreicherung nach dem Raum mit

$$\frac{\partial M_j^{\text{abs}}}{\partial x_k} = \frac{\partial N_j}{\partial x_k} R + N_j \frac{\partial R}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R}{\partial x_k} = \frac{\partial N_n}{\partial x_k} \left(|\hat{\phi}_n| - \text{sgn}(\phi) \hat{\phi}_n \right) \quad (4.7)$$

angegeben.

Weiterhin ist im Bezug auf den Stabilisierungsterm (3.65e) der Gradient des Drucks zusammen mit der Ableitung

$$\frac{\partial M_j^{\text{sgn}}}{\partial x_k} = \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \psi_j^{\text{sgn}} \quad (4.8)$$

berechnet und $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ unter anderem mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_j^{\text{abs}}}{\partial x_k \partial x_l} &= \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \frac{\partial R}{\partial x_l} + \frac{\partial N_j}{\partial x_l} \frac{\partial R}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 N_j}{\partial x_k \partial x_l} R + N_j \frac{\partial^2 R}{\partial x_k \partial x_l} \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial x_k \partial x_l} &= \frac{\partial^2 N_n}{\partial x_k \partial x_l} \left(|\hat{\phi}_n| - \text{sgn}(\phi) \hat{\phi}_n \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

bestimmt.

Während sich das Geschwindigkeitsfeld in Fluiden aufgrund ihrer Viskosität mit der Zeit im Raum entwickelt, ist der Verformungszustand von Strukturen mit elastischem Potential nach Gleichung (3.87) in der Zeit konstant, wenn deren Masseträgheit vernachlässigt ist. In diesem Fall wirkt sich eine lokale Verformung zugleich auf den Verformungszustand im gesamten Gebiet der Struktur aus, so dass den Wegrandbedingungen eine besondere Bedeutung zukommt. Die Berechnung des Verformungszustandes auf Grundlage der Finite-Elemente-Methode nach Gleichung (3.26) fordert die Erfüllung von Wegrandbedingungen in starker Form. Während die Wegrandbedingungen mit den physikalischen Freiwerten der Lagrange-Polynome in nicht angereicherten Elementen in starker Form erfüllt sind, bedingt die modifizierte abs-Anreicherung im Allgemeinen die schwache Form der Wegrandbedingungen für angereicherte Elemente nach Gleichung (3.25). Sonderfälle stellen Wegrandbedingungen des Typs

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

und Kopplungen zwischen angereicherten und nicht angereicherten Elementen dar.

Wegrandbedingungen nach Gleichung (4.10) sind mit der Reduzierung des Ansatzes nach Gleichung (4.2) auf einen kinematisch verträglichen Ansatz weiterhin in starker Form erfüllt. Dazu sind die entsprechenden Freiwerte des Lagrange-Ansatzes und der Anreicherung unabhängig von deren Lage entlang des Randes zu null gesetzt. Dieses Vorgehen setzt voraus, dass jede Komponente des Geschwindigkeitsvektors zu null zu setzen ist, oder bei

$$\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (4.11)$$

der Normalenvektor einem Einheitsvektor des Koordinatensystems entspricht (vergleiche Abbildung 2.1). Ansonsten ist eine Nebenbedingung zu formulieren, mit der die Freiwerte der Anreicherung in kinematische Relation gesetzt sind. Die Kopplung zwischen angereicherten und nicht angereicherten Elementen ist mit dem Finite-Elemente-Netz in Abbildung 4.2 verdeutlicht. Es steht für einen Siloquerschnitt mit kreisrundem Einschluss im Schüttgut, das mit einer dünnen Schale umschlossen ist.

Die angereicherten Elemente im Gebiet des Schüttgutes sind grau hinterlegt und zeigen mit der Abstufung der Grautöne den Verlauf der Oberfläche zwischen den Teilgebieten. Sie stehen am Übergang in Wechselwirkung mit den Elementen der Schale.

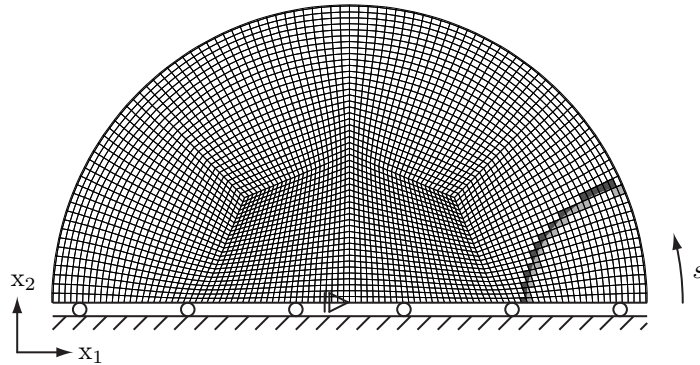


Abbildung 4.2: FE-Netz mit angereicherten Elementen

Die Verschiebungen der Schale sind allein mit den Lagrange-Ansätzen in den angereicherten Elementen vollständig auf die Verschiebungen des Schüttgutes abgebildet. Damit haben die Anreicherungen am Übergang zwischen dem Schüttgut und der Schale nur infolge der Ausrichtung des Randes s , der mit seiner Krümmung nicht parallel zu den Achsen x_1 und x_2 verläuft, einen Einfluss auf die Näherungslösung für das Geschwindigkeitsfeld. Mit dem entwickelten Finite-Elemente-Programm sind die Freiwerte der Anreicherung entweder gar nicht oder in starker Form gesetzt. Für die Berechnung des Verschiebungszustandes im Siloquerschnitt, der in Kapitel 8.3.1 diskutiert ist, sind neben den Freiwerten in der Symmetrieebene auch die Freiwerte der Anreicherungen am Übergang zwischen dem Schüttgut und der Schale zu null gesetzt. Aus diesem Grund ist das Verschiebungsfeld in Abbildung 8.14b auf Grundlage linearer Lagrange-Ansätze nicht optimal angenähert.

4.2 Numerische Integration

Die Anwendung der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode auf räumliche Körper erfordert die Auswertung von Integralen in vierdimensionalen Gebieten. Mit dem linearen Lagrange-Ansatz für die Geometrie und die Zeit sind die Integrationspunkte in Elementen bereitgestellt, deren Referenzkonfiguration mit einem Tesseract beschrieben ist (siehe Abbildung 3.8). Sie sind in Abhängigkeit der Lage der Oberfläche zwischen den Teilgebieten bestimmt, so dass auch die Anreicherungen nach Kapitel 4.1 vollständig numerisch integriert sind. Dabei ist berücksichtigt, dass die Oberfläche zwischen den Teilgebieten nicht ortsfest, sondern im Zeitbereich frei beweglich ist. Während sich im zweidimensionalen Raum die Oberfläche in Form einer Linie zusammen mit ihrer zeitlicher Entwicklung zu einem flächigen Grenzkörper aufspannt, ist die Oberfläche in einem Tesseract zu einem dreidimensionalen Grenzkörper entwickelt (siehe Abbildung 4.3). Unter Beachtung, dass jeder Finite-Element-Knoten

k mit dem einen oder anderen Vorzeichen der Abstandsfunktion belegt sein kann, gibt es $2^{\sum k}$ mögliche Lagen des Grenzkörpers innerhalb eines Elementes. So sind in einem Quadrat $2^4 = 16$ mögliche Lagen des Grenzkörpers zu unterscheiden. Demgegenüber sind in einem Tesseract $2^{16} = 65536$ Möglichkeiten für die Bestimmung der Lage des Grenzkörpers zu berücksichtigen, so dass ein allgemein gültiger Algorithmus für die Berechnung der Lage und Wichtung der Integrationspunkte entwickelt ist. Die Schritte

- Parkettierung des Tesserakts,
- Rekonstruktion der Teilgebiete und
- Positionen und Wichtungen der Integrationspunkte

gliedern den entwickelten Algorithmus und sind im Folgenden näher beschrieben.

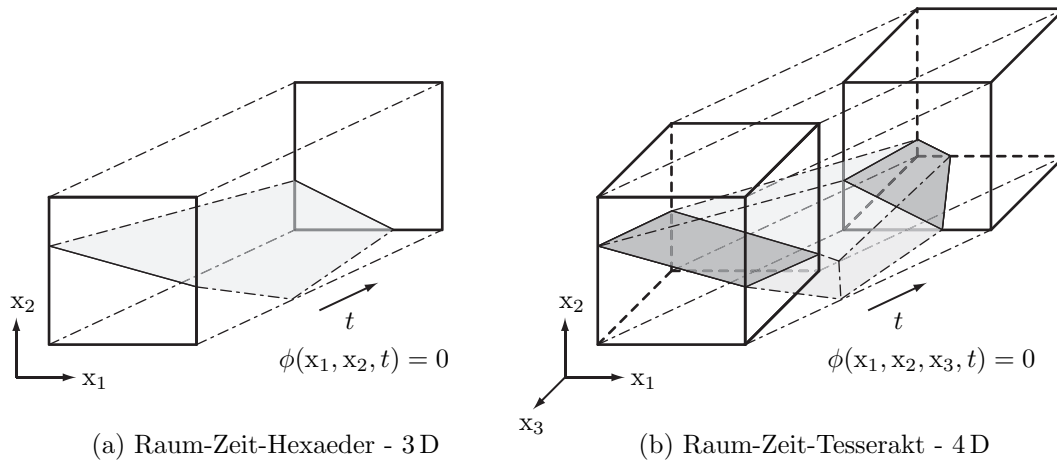


Abbildung 4.3: $\phi = 0$ - Kontur in Raum-Zeit-Elementen

Parkettierung des Tesserakts

Im ersten Schritt ist das Gebiet des Tesserakts vorläufig in 24 Pentatope unterteilt. Pentatope zählen zu der Klasse der Simplexe als geometrische Primitiva. Ein n -dimensionales Simplex besteht aus $n+1$ Knoten, die alle untereinander mit Geraden zu einem geometrischen Körper verbunden sind. So ist ein Pentatop aus einem Tetraeder generiert, indem ein weiterer Knoten hinzufügt und dieser mit allen bereits bestehenden Knoten verbunden wird (vergleiche Abbildung 4.4).

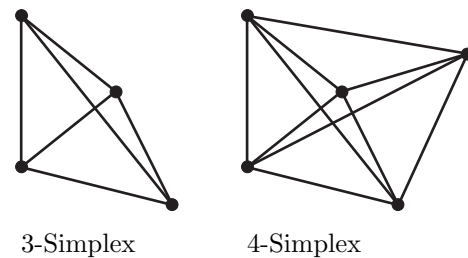


Abbildung 4.4: Simplexe

Der entwickelte Algorithmus setzt voraus, dass die Linien der Pentatope entweder gar nicht oder nur einmal von der Nullkontur der Abstandsfunktion durchlaufen werden. Mit dem im Tesseract definierten quatralinearen Polynomansatz für die Abstandsfunktion können die Linien der Pentatope jedoch bis zu viermal durchlaufen werden. Aus diesem Grund folgt der vorläufigen eine adaptive Parkettierung mit der sichergestellt ist, dass jede Linie maximal einmal von der Nullkontur durchlaufen ist. Sie ist im Folgenden an einem quadratischen Element dargestellt (siehe Abbildung 4.5).

Zunächst ist das Quadrat mit einer vorgegebenen Inzidenz in zwei Dreiecke unterteilt. Mit der vorläufigen Parkettierung ist die Linie \overline{AC} an zwei Stellen von der gekrümmten Nullkontur der Abstandsfunktion durchlaufen, so dass sie innerhalb der adaptiven Parkettierung mit einem zusätzlichen Knoten unterteilt ist.

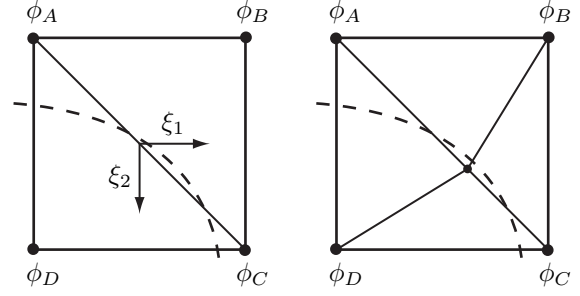


Abbildung 4.5: Parkettierung

Der gekrümmte Verlauf der Nullkontur ist mit den gebrochen rationalen Funktion

$$\xi_1(\xi_2) = -\frac{a_0 + a_1 \xi_2}{a_2 + a_3 \xi_2} \quad \text{und} \quad \xi_2(\xi_1) = -\frac{a_0 + a_2 \xi_1}{a_1 + a_3 \xi_1} \quad (4.12)$$

in Abhängigkeit der Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= \phi_A + \phi_B + \phi_C + \phi_D, \\ a_1 &= -\phi_A - \phi_B + \phi_C + \phi_D, \\ a_2 &= -\phi_A + \phi_B + \phi_C - \phi_D \quad \text{und} \\ a_3 &= \phi_A - \phi_B + \phi_C - \phi_D \end{aligned}$$

und lokalen Koordinaten ξ_1 und ξ_2 beschrieben. Sie entsprechen für $\phi(\xi) = 0$ dem bilinearen Ansatz für die Abstandsfunktion, der mit

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \phi_A + \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \phi_B \\ &\quad + \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \phi_C + \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \phi_D \quad \text{formuliert ist.} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Rekonstruktion der Teilgebiete

Nach der Parkettierung sind Pentatope, die einen Teil des Grenzkörpers enthalten, in weitere Pentatope unterteilt, so dass jedes Pentatop nur im Gebiet eines materiellen Körpers liegt. Dabei ist auch hier beachtet, dass sich die Abstandsfunktion aufgrund ihres quatralinearen Ansatzes mit einem Polynom vierter Ordnung entlang

der Linien der Pentatope entwickeln kann. Diese Charakteristik von symmetrischen Ansätzen ist mit der Rekonstruktion der Teilgebiete für das adaptiv parkettierte Quadrat in Abbildung 4.5 verdeutlicht.

Die Nullstellen der Abstandsfunktion entlang der Linie \overline{AC} sind mit der Gleichung

$$\begin{aligned} \phi(\eta) = & \frac{1}{4}(1 - \eta n_1 - \xi_1^0)(1 - \eta n_2 - \xi_2^0) \phi_A \\ & + \frac{1}{4}(1 + \eta n_1 + \xi_1^0)(1 - \eta n_2 - \xi_2^0) \phi_B \\ & + \frac{1}{4}(1 + \eta n_1 + \xi_1^0)(1 + \eta n_2 + \xi_2^0) \phi_C \\ & + \frac{1}{4}(1 - \eta n_1 - \xi_1^0)(1 + \eta n_2 + \xi_2^0) \phi_D = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

festgelegt, wenn mit $\xi_1^0 = \xi_2^0 = -1$ das lokale Koordinatensystem des Elementes in den Punkt A verschoben ist (siehe Abbildung 4.6). Sie entspricht mit $\mathbf{n} = \overline{AC}$ der Abbildung der bilinearen Abstandsfunktion (4.13) auf die lokale Koordinate η der Linie \overline{AC} , die mit $0 \leq \eta \leq 1$ im Bereich des Quadrates definiert ist. Mit den Nullstellen der quadratischen Gleichung (4.14) sind die Teilgebiete des Quadrates mit zwölf Dreiecken linear angenähert.

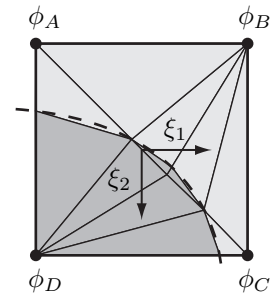
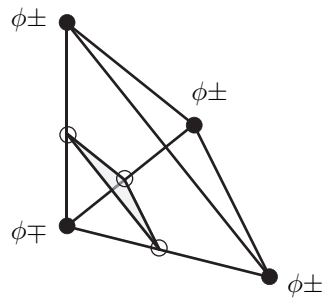
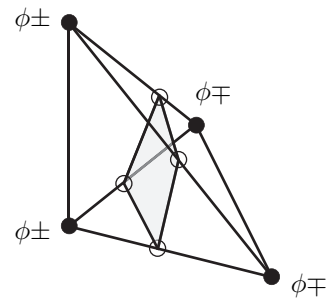


Abbildung 4.6: Rekonstruktion

Während die Form des Grenzkörpers in Dreiecken stets mit einer Linie beschrieben ist, kann der Grenzkörper in einem Tetraeder in Abhängigkeit der Vorzeichen der Abstandswerte an den Knoten zwei unterschiedliche Formen annehmen (siehe Abbildung 4.7). In beiden Fällen ist eine allgemein gültige Vorschrift für die Parkettierung der Teilgebiete hergeleitet. Mit den allgemein gültigen Vorschriften ist ein Tetraeder mit Grenzkörper des Typs 1 in vier und ein Tetraeder mit Grenzkörper des Typs 2 in sechs Tetraeder unterteilt.



(a) Grenzkörper Typ 1



(b) Grenzkörper Typ 2

Abbildung 4.7: Typisierung von Tetraedern

Auch in einem Pentatop kann der Grenzkörper mit zwei unterschiedlich geometrischen Formen typisiert werden (siehe Abbildung 4.8). Während für ein Pentatop mit Grenzkörper des Typs 1 eine allgemein gültige Vorschrift zu dessen Parkettierung angegeben werden kann, ist dies für einen Grenzkörper des Typs 2 nicht möglich.

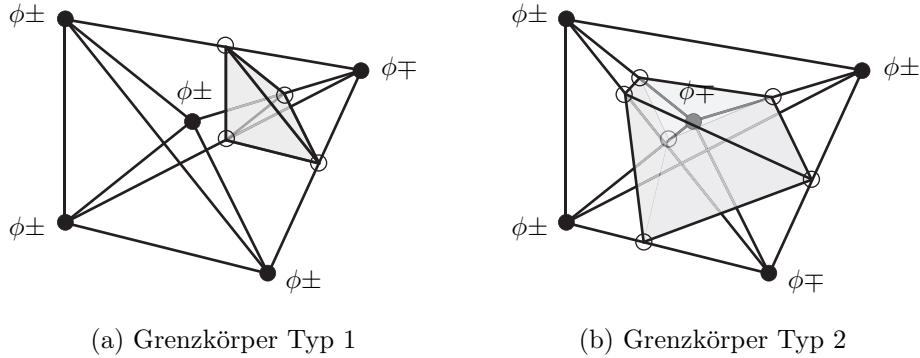


Abbildung 4.8: Typisierung von Pentatopen

Im Fall eines Grenzkörpers des Typs 2 sind die Teilgebiete des Pentatops mit der 4D-Triangulation nach Delone ohne Lücken und Überschneidungen parkettiert. Eine Simulation mit Zufallszahlen für die Werte der Abstandsfunktion an den Knoten zeigt, dass ein Pentatop mit Grenzkörper des Typs 2 entweder mit zehn, elf, zwölf oder 13 Pentatopen unterteilt ist (siehe Abbildung 4.9).

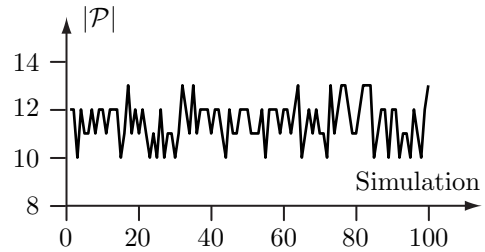


Abbildung 4.9: Anzahl der Pentatope

Mit dem entwickelten Finite-Elemente-Programm ist die Lage der freien Oberfläche im Referenzelement der Elemente rekonstruiert (vergleiche Abbildung 4.10). Mit der nichtlinearen Abbildung zwischen ihrem lokalen und globalen Koordinatensystem ist damit die Lage der freien Oberfläche nur in unverzerrten Elementen punktuell exakt rekonstruiert (vergleiche MAYER [45]). In diesem Zusammenhang ist ein Element als verzerrt anzusehen, wenn die Jakobimatrix \mathbf{J}_e veränderlich ist.

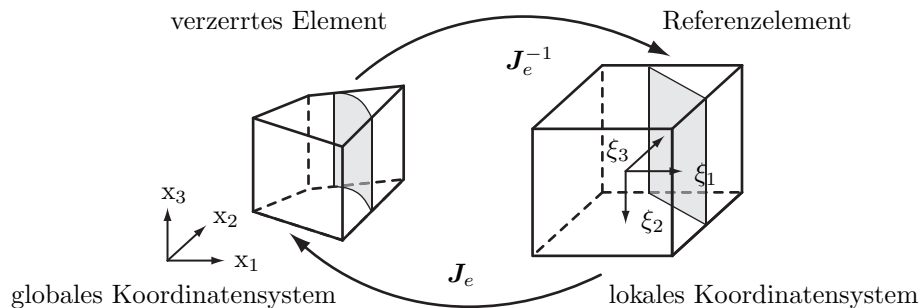


Abbildung 4.10: Abbildung zwischen den Räumen eines Elementes

Positionen und Wichtungen der Integrationspunkte

Abschließend sind die Positionen und Wichtungen der Integrationspunkte bestimmt, mit denen das Integral

$$\int_{Q_e} f(\mathbf{x}, t) dQ = \int_{Q_e^-} f(\mathbf{x}, t) dQ + \int_{Q_e^+} f(\mathbf{x}, t) dQ \quad (4.15a)$$

$$= \sum_{i=1}^{|\mathcal{P}^-|} \int_{\mathcal{P}_i^-} f(\mathbf{x}, t) d\mathcal{P}_i + \sum_{i=1}^{|\mathcal{P}^+|} \int_{\mathcal{P}_i^+} f(\mathbf{x}, t) d\mathcal{P}_i \quad (4.15b)$$

$$\approx \sum_{j=1}^{|w|} f(\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j}, \tau_j) w_j |\det(\mathbf{J}_e)| \quad (4.15c)$$

über die Funktion f im Gebiet Q_e eines angereicherten Elementes ausgewertet ist (vergleiche ZIENKIEWICZ [71]). Sie sind mit Integrationsformeln für Polynome im Gebiet \mathcal{P} eines Pentatops bestimmt. Formeln für die numerische Integration eines Polynoms der Ordnung m , definiert im Gebiet eines Pentatops mit $\int d\mathcal{P} = 1/4!$, sind von STROUD [58], DONCKER [18], GRUNDMANN [29] und COOLS [15] hergeleitet und im Anhang A.2.2 tabellarisch zusammengestellt. Allen Formeln ist gemein, dass die Integrationspunkte im Gebiet oder auf dem Rand des Pentatops liegen, wenn auch die Wichtungen zum Teil mit negativen Werten belegt sind. Nachdem die Positionen der Integrationspunkte in den einzelnen Pentatopen bestimmt und auf die Koordinaten des Tesserakts übertragen sind, sind die Werte der Wichtungen mit den Werten der Gebietsintegrale der entsprechenden Pentatope skaliert. Der Wert eines Gebietsintegrals ist mit

$$\int_{\text{n-Simplex}} dQ = \sqrt{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} \det(\mathbf{J}^{\text{CM}})} \quad (4.16)$$

in Abhängigkeit der Matrix

$$\mathbf{J}^{\text{CM}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & a_{01}^2 & a_{02}^2 & \cdots & a_{0n}^2 \\ & & 0 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 \\ & & & 0 & \cdots & a_{2n}^2 \\ & & & & \ddots & \\ \text{sym} & & & & & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

nach Cayley-Menger bestimmt, deren Elemente mit den Längen a_{ij} zwischen den Knoten i und j definiert sind.

Mit dem dargestellten Algorithmus sind Raum-Zeit-Integrale mit Elementen ausgewertet, deren Referenzelement mit einem Tesserakt beschrieben ist. Die Übergangsbedingungen der zeit-diskontinuierlichen Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung sind in angereicherten Elementen mit demselben Schema bestimmt. Die dazu erforderlichen Integrationsformeln für Polynome, definiert im Gebiet eines Tetraeders, sind im Anhang A.2.1 angegeben.

Kugelförmiger Einschluss

Der implementierte Algorithmus für die numerische Integration von diskontinuierlich verlaufenden Funktionen und dessen Einbindung in das entwickelte Finite-Elemente-Programm ist mit einem Modell eines kugelförmigen Einschlusses verifiziert. Das Material des kugelförmigen Einschlusses mit einem Radius von $r_K = 0,5 m$ ist mit einem Kompressionsmodul von $K_1 = 50/6 \cdot 10^6 N/m^2$ und einer Querdehnzahl von $\nu = 0,3$ als elastische Struktur beschrieben. Der in Abbildung 4.11 dargestellte Einschluss liegt im Zentrum eines würfelförmigen Gebietes mit einer Seitenlänge von $l = 2 m$. Das Gebiet ist mit einem nachgiebigeren Material belegt, dessen Kompressionsmodul mit $K_2 = 5/6 \cdot 10^6 N/m^2$ von dem des Einschlusses abweicht.

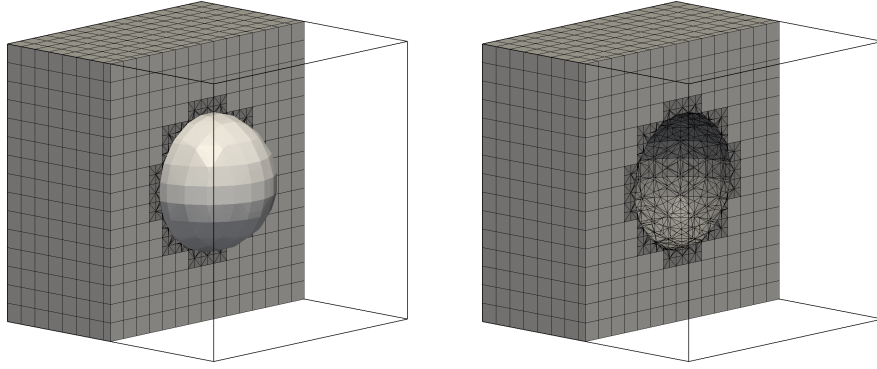


Abbildung 4.11: Kugelförmiger Einschluss

Der implementierte Algorithmus ist mit der Konvergenz der Näherungslösung für das Verschiebungsfeld bei eingepprägten Wegrandbedingungen untersucht. Sie sind entsprechend der analytischen Lösung für das ESHELBY-Problem [23] gesetzt, die das elastische Feld im Gebiet einer unendlich ausgedehnten Struktur mit Einschluss in geometrischer Form eines Ellipsoids beschreibt. Die analytische Lösung ist für den speziellen Fall eines kugelförmigen Einschlusses mit der radialen Verschiebung

$$u_r(r) = \int \epsilon_r(r) dr = \begin{cases} r \epsilon_\infty - \frac{39 r}{4600} & r \leq r_K \\ r \epsilon_\infty - \frac{39 (2 r_K)^3}{36800 r^2} & r \geq r_K \end{cases} \quad (4.18)$$

und der radialen Verzerrung

$$\epsilon_r(r) = \begin{cases} \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} \epsilon^* + \epsilon_\infty & r \leq r_K \\ -\frac{2(1 + \nu)}{3(1 - \nu)} \frac{r_K^3}{r^3} \epsilon^* + \epsilon_\infty & r \geq r_K \end{cases} \quad (4.19)$$

mit

$$\epsilon^* = \frac{3(K_1 - K_2)(1 - \nu)}{(4\nu - 2)K_2 - (1 + \nu)K_1} \epsilon_\infty \quad (4.20)$$

von ZANGMEISTER [70] in Abhängigkeit der Verzerrung ϵ_∞ im Unendlichen angegeben. Die Auswertung der analytischen Lösung nach Gleichung (4.18) und (4.19) führt für die zuvor angegebenen Modellparameter und $\epsilon_\infty = 0,01$ auf die in Abbildung 4.12 dargestellten Verläufe der radialen Verzerrung und Verschiebung.

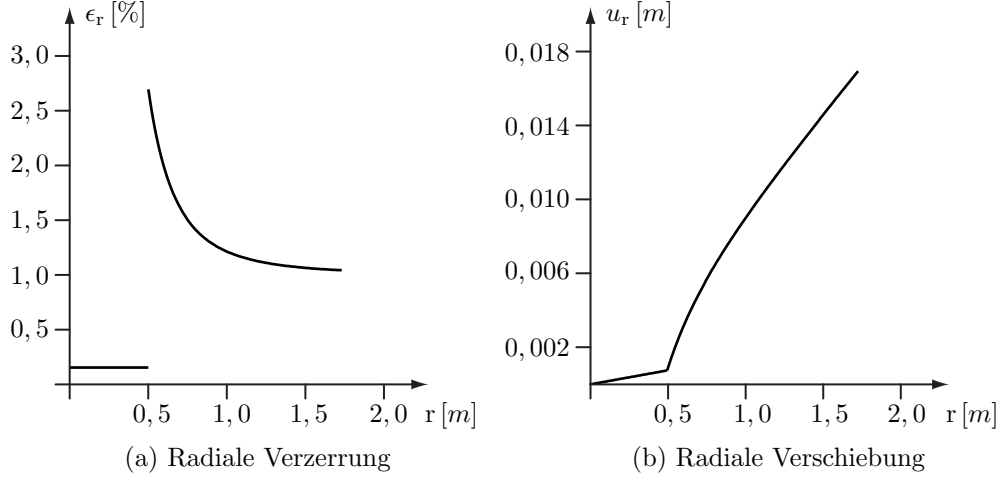


Abbildung 4.12: Analytische Lösung

ZANGMEISTER zeigt, dass die Näherungslösung quadratisch gegen die analytische Lösung konvergiert, wenn mit der Reduzierung der Seitenlänge der würfelförmigen Elemente zugleich die Abstandsfunktion besser angenähert ist. Näherungslösungen sind sowohl mit einer Weggrößenformulierung als auch mit einer gemischten Formulierung der Modellgleichungen bestimmt. In beiden Fällen sind die Verschiebungen mit linearen Lagrange-Ansätzen in nicht angereicherten Elementen approximiert. Der Fehler der Näherungslösung für das

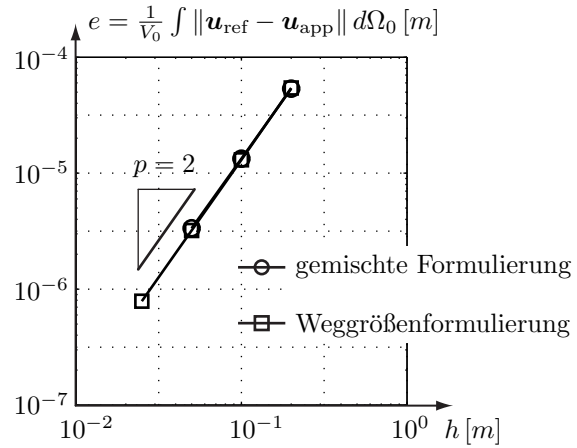


Abbildung 4.13: Konvergenz

Verschiebungsfeld ist in Abhängigkeit der Seitenlänge der Elemente in Abbildung 4.13 dargestellt. Mit der Entwicklung des Fehlers ist in beiden Fällen die quadratische Konvergenz bestätigt. Auch ist der globale Fehler bei gleicher Seitenlänge nahezu identisch. So ist festzuhalten, dass die geringfügig verschiedene Annäherung der Steifigkeiten in angereicherten und nicht angereicherten gemischt-hybriden Elementen mit trilinearen beziehungsweise abgestimmten Polynomansätzen für die Spannungen das Verschiebungsfeld im vorliegenden Fall nicht wesentlich beeinflusst.

5 Bewegungen freier Oberflächen

Mit der Absicht die Entwicklung der freien Oberflächen von Schüttgütern während der Entleerung von Silos verfolgen zu können, wird die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion im Gebiet des Beobachters mit der Level-Set-Gleichung bewegt. Hinsichtlich eines konsistenten Verfahrens wird eine Näherungslösung für die Abstandsfunktion mit dem stabilisierten Galerkin-Verfahren nach KÖLKE [41] bestimmt. Für ein besseres Verständnis des Lösungsverhaltens sind Näherungslösungen für die Abstandsfunktion eines bewegten Einschlusses alternativ auf Grundlage der Fehlerquadratmethode berechnet.

Mit Anwendung des stabilisierten Galerkin-Verfahrens entartet die Näherungslösung für die Abstandsfunktion mit der Zeit. So wird untersucht, in wie weit die Güte der Näherungslösung mit Polynomansätzen höherer Ordnung verbessert werden kann. Um sicher zu stellen, dass mit dem Transport der Abstandsfunktion kein Fluid unbestimmter Menge in das Gebiet des Betrachters bewegt wird, ist sie mit einem Algorithmus in zeitlichen Abständen reinitialisiert, dessen Ablauf nachfolgend dargestellt wird.

5.1 Level-Set-Methode

Die Lage der freien Oberfläche zwischen zwei Fluiden ist mit der Nullkontur der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion nach Gleichung (4.4) implizit beschrieben. Sie wird im Gebiet eines ortsfesten Beobachters mit der Level-Set-Gleichung

$$\mathcal{L}_L = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (5.1)$$

in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes bewegt. Die Level-Set-Gleichung entspricht nach Gleichung (2.5) der materiellen Zeitableitung der Abstandsfunktion in Eulerscher Formulierung und fordert mit $\dot{\phi} = 0$ deren Erhaltung. Eine spezielle Lösung der Level-Set-Gleichung erfordert neben der Anfangsbedingung

$$\phi(t = 0) = \phi_0 \quad (5.2)$$

aufgrund des konvektiven Terms $\mathbf{v} \cdot \nabla \phi$ auch eine entsprechende Randbedingung.

Eine Näherungslösung für die Abstandsfunktion ist nach KÖLKE [41] mit dem stabilisierten zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren

$$\int_{Q_n} \delta\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \right) dQ \quad (5.3a)$$

$$+ \int_{\Omega_n} \delta\phi(t_n^+) (\phi(t_n^+) - \phi(t_n^-)) d\Omega \quad (5.3b)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n} \kappa_L \mathcal{L}_L(\delta\phi) \mathcal{L}_L(\phi) dQ = 0 \quad (5.3c)$$

in Abhängigkeit des Stabilisierungsparameters

$$\kappa_L = 1/\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\Delta\mathbf{v}\|}{h}\right)^2} \quad (5.4)$$

bestimmt. Sie erweitert konsistent die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung nach Gleichung (3.65) und (3.66). Alternativ hierzu wird die Abstandsfunktion auf Grundlage der schwachen Form

$$\int_{Q_n} \mathcal{L}_L(\delta\phi) \mathcal{L}_L(\phi) dQ = 0 \quad (5.5)$$

zeitkontinuierlich angenähert, mit der das Galerkin-Verfahren nach Gleichung (5.3) elementweise stabilisiert ist. Im Gegensatz zu dem zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren ist die Übergangsbedingung zwischen den Zeitscheiben in starker Form erfüllt, so dass das Vorzeichen der Abstandsfunktion erhalten bleibt. Mit dem Integral (5.3b) und dem Ansatz für die Diskretisierung des Integranden in Gleichung (5.5) ist die Anfangsbedingung nach Gleichung (5.2) in schwacher beziehungsweise starker Form erfüllt. Der Fluss der Feldgröße über den Rand des Gebietes ist mit der entsprechenden Randbedingung hingegen nicht vorgegeben. In Bezug auf die numerische Analyse selbstinduzierter Entleerungen von Silos ist damit sichergestellt, dass sich das Strömungsfeld im Schüttgut frei entwickeln kann. Mit der Verformung des Raum-Zeit Gebietes sind die Geschwindigkeiten des Beobachters nach Gleichung (3.86) implizit erfasst, so dass mit den schwachen Formen nach Gleichung (5.3) und (5.5) auch die Bewegung von freien Oberflächen in Strömungen mit Fluid-Struktur-Wechselwirkung beschrieben ist.

Nachfolgend wird das räumliche Lösungsverhalten beider Verfahren für unterschiedliche Approximationen in Raum und Zeit für einen kreisförmigen Einschluss auf einem quadratischen Gebiet untersucht. Das Geschwindigkeitsfeld ist in Abbildung 5.1 für eine formerhaltende und eine nicht formerhaltende Bewegung des Einschlusses definiert.

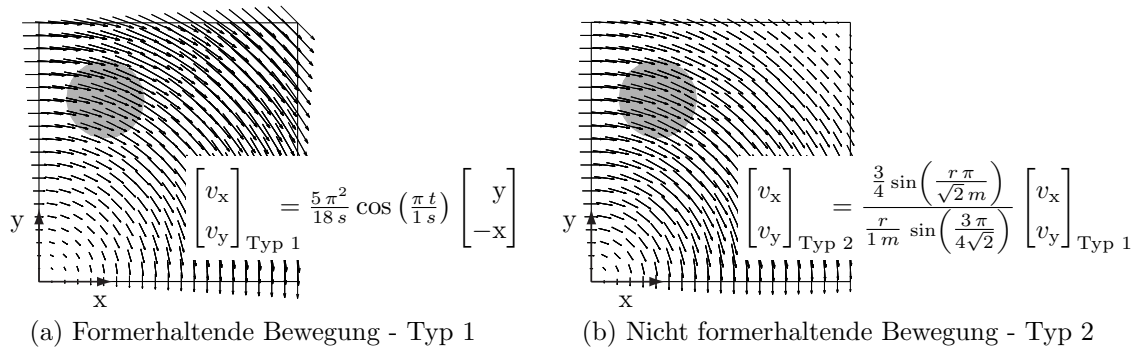


Abbildung 5.1: Geschwindigkeitsfelder

Das quadratische Gebiet mit einer Seitenlänge von $l = 1\text{ m}$ ist in Abhängigkeit der Approximation der Abstandsfunktion für eine identische Anzahl von 10×10 Finite-Element-Knoten elementiert und die Bewegung des Einschlusses für eine Zeitdauer von $t_{ges} = 1\text{ s}$ mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,02\text{ s}$ berechnet.

Die Form des Einschlusses ist für die formerhaltende Bewegung in Abbildung 5.2 zu den Zeitpunkten $t_1 = 0,5\text{ s}$ und $t_2 = 1,0\text{ s}$ in Abhängigkeit des numerischen Verfahrens und der zeitlichen Approximation der Abstandsfunktion dargestellt. Ist auch die zeitliche Entwicklung der Abstandsfunktion mit unterschiedlichen Ansätzen angenähert, so ist deren Verlauf im Raum mit linearen Ansätzen im Elementgebiet beschrieben.

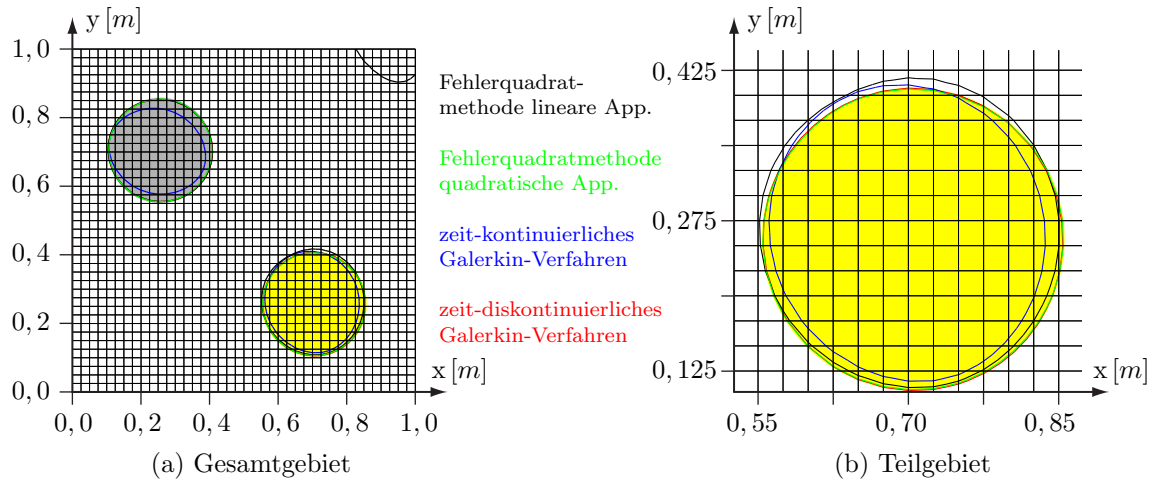


Abbildung 5.2: Form des Einschlusses für die Bewegung des Typs 1

Die schwarze und grüne Linie entsprechen der Nullkontur der Abstandsfunktion, deren zeitliche Entwicklung mit linearen beziehungsweise quadratischen Lagrange-Ansätzen beschrieben und nach der Fehlerquadratmethode berechnet ist. Im Gegensatz dazu sind die Bewegungen der blauen und roten Linie mit zeit-kontinuierlichen beziehungsweise zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren berechnet. Dabei sind die schwachen Formen der Galerkin-Verfahren in der Zeit in beiden Fällen mit ei-

nem linearen Ansatz diskretisiert, so dass der Unterschied zwischen den Galerkin-Verfahren nur in der Formulierung der Übergangsbedingung liegt. Mit dem zeit-kontinuierlichen Galerkin-Verfahren ist die Übergangsbedingung mit dem Ansatz in starker Form erfüllt, so dass die schwache Form der Übergangsbedingung des zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens in Zeile (5.3b) nicht ausgewertet ist (vergleiche Kapitel 3.1.1).

Der Vergleich der Formen des Einschlusses zeigt, dass die formerhaltende Bewegung mit dem zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren und der Fehlerquadratmethode nahezu exakt abgebildet ist, wenn die Abstandsfunktion mit linearen beziehungsweise quadratischen Lagrange-Ansätzen in der Zeit beschrieben ist. Mit dem zeit-kontinuierlichen Galerkin-Verfahren und der Fehlerquadratmethode weichen die blaue beziehungsweise schwarze Linie sichtlich von der kreisrunden Form ab, so dass die Abstandsfunktion ungenau angenähert ist, wenn deren zeitliche Entwicklung mit linearen Lagrange-Ansätzen formuliert ist (vergleiche Tabelle 3.1).

Im Folgenden ist der Einfluss der räumlichen Ansätze für die Abstandsfunktion auf deren Näherungslösung für das zeit-diskontinuierliche Galerkin-Verfahren untersucht. In Abbildung 5.3b ist der Verlauf der Abstandsfunktion nach einem Bewegungszyklus dargestellt, der alternativ mit Elementen des Typs Q4 oder Q9 mit linearen beziehungsweise quadratischen Lagrange-Ansätzen im Raum berechnet ist. Im Vergleich mit der exakten Abstandsfunktion, die in Abbildung 5.3a dargestellt ist, zeigen beide Näherungslösungen leichte Abweichungen im Verlauf, so dass keine eindeutige Aussage zum Lösungsverhalten getroffen werden kann.

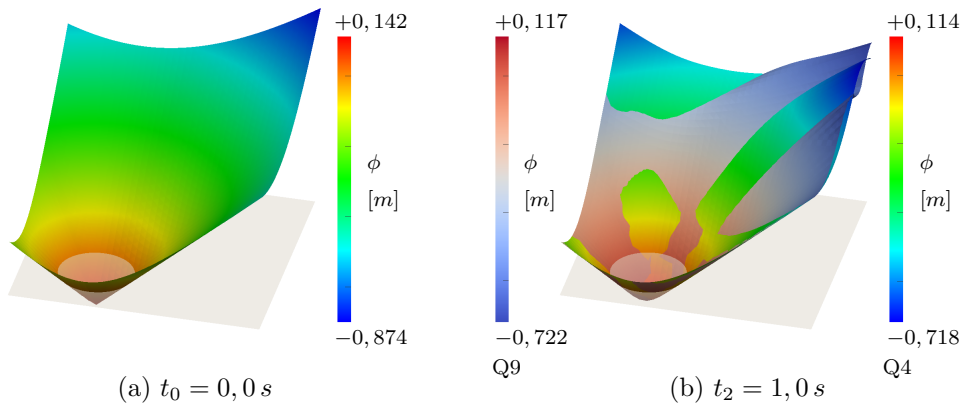


Abbildung 5.3: Abstandsfunktion zu diskreten Zeitpunkten - Bewegung Typ 1

Die in Abbildung 5.4 dargestellten Formen des kreisförmigen Einschlusses nach einem Zyklus mit nicht formerhaltender Bewegung bestätigen die zuvor getroffenen Aussagen im Bezug auf das Lösungsverhalten in Abhängigkeit der zeitlichen Approximation.

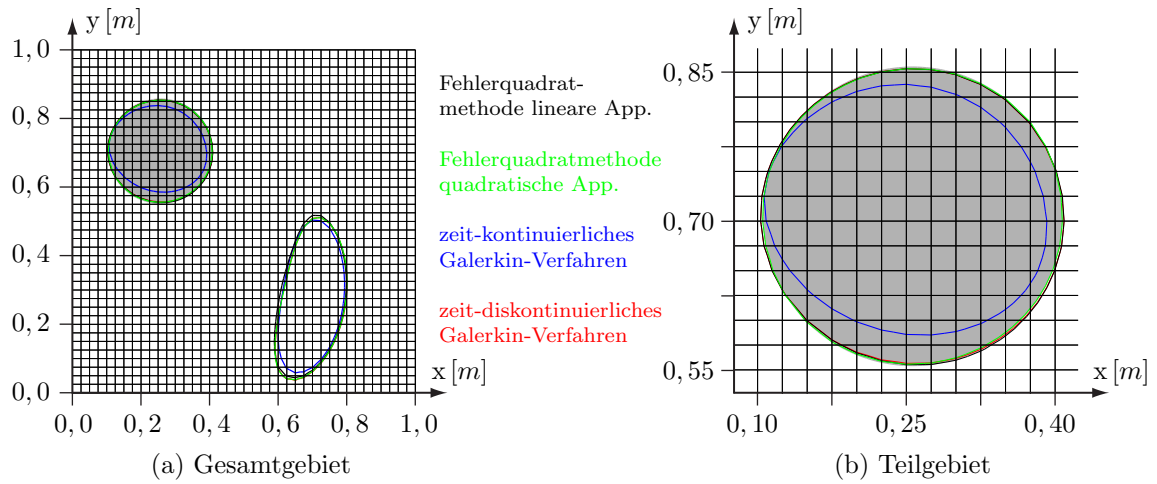


Abbildung 5.4: Form des Einschlusses für die Bewegung des Typs 2

Deutlicher wirkt sich die nicht formerhaltende Bewegung des kreisförmigen Einschlusses auf den räumlichen Verlauf der Abstandsfunktion aus. Der Vergleich der Abstandsfunktionen in Abbildung 5.5 zeigt, dass deren Näherungslösung allein mit Polynomansätzen höherer Ordnung nicht verbessert ist. Vielmehr sind ausgeprägte Oszillationen im räumlichen Verlauf der Näherungslösung entlang der offenen Ränder des Gebietes zu erkennen.

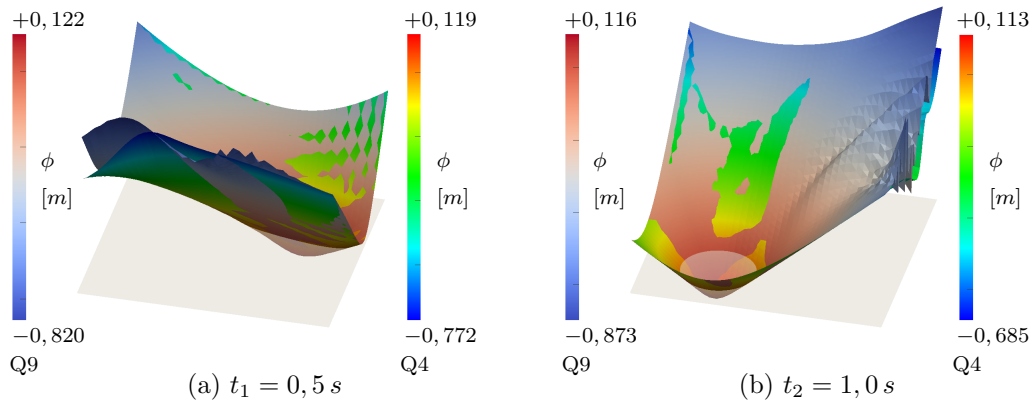


Abbildung 5.5: Abstandsfunktion zu diskreten Zeitpunkten - Bewegung Typ 2

Die Oszillationen zeigen, dass die lokale und konvektive Zeitableitung im Integranden (5.3a) nicht gleichwertig beschrieben und mit der vollständigen numerischen Integration nicht aufeinander abgestimmt sind. Während die Diskrepanz zwischen den Termen der lokalen und konvektiven Zeitableitung im räumlichen Fall bei trilinearen Ansätzen für die Abstandsfunktion und die Geschwindigkeiten noch moderat ist, ist bei triquadratischen Ansätzen in der lokalen Zeitableitung ein Monom sechster Ordnung enthalten, während der räumliche Verlauf der konvektiven Zeitableitung auch mit einem Monom elfter Ordnung beschrieben ist.

Abschließend ist der räumliche Verlauf der Näherungslösung für die nicht formhaltende Bewegung mit dreifachen Werten der Geschwindigkeiten untersucht, mit denen der Einschluss aus dem Gebiet des Beobachters bewegt ist. In Abbildung 5.6 sind unterschiedliche Näherungslösungen zum Zeitpunkt $t_1 = 0,5\text{ s}$ dargestellt, die mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,01\text{ s}$ berechnet sind. Der Vergleich der Abbildungen 5.6a und 5.6b zeigt, dass mit dem Standard Galerkin-Verfahren die Abstandsfunktion mit ausgeprägten Oszillationen im räumlichen Verlauf unzureichend angenähert ist. Erst mit einer Stabilisierung des Verfahrens ist eine akzeptable Näherungslösung möglich. Der Einfluss der Stabilisierung ist mit den Verläufen der Näherungslösungen in Abbildung 5.6c und 5.6d dargestellt, die sich im Vergleich mit Abbildung 5.6b deutlich gedämpft entwickeln.

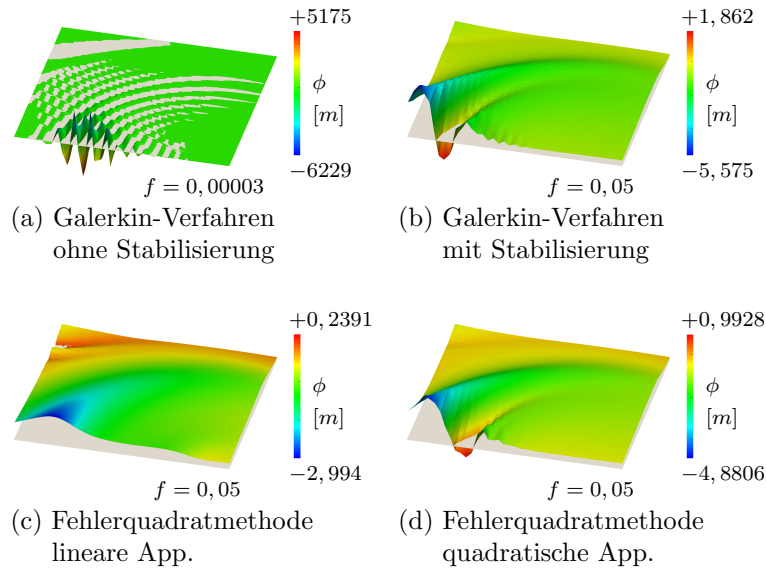


Abbildung 5.6: Abstandsfunktion zum Zeitpunkt $t_1 = 0,5\text{ s}$ - Bewegung Typ 2

Der Vergleich der Abbildungen 5.6c und 5.6d zeigt, dass sich auch bei einer Berechnung nach der Fehlerquadratmethode das Vorzeichen im Verlauf der Näherungslösung ändern kann, so dass sich das Fluid mit den Materialparametern des kreisförmigen Einschlusses über die offenen Ränder in das Gebiet des Beobachters bewegt. Aus diesem Grund und mit dem Ziel eines einheitlichen Verfahrens wird die Bewegung der freien Oberfläche im Folgenden mit dem zeit-diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren berechnet.

5.2 Reinitialisierung

Verändert sich das Geschwindigkeitsfeld im räumlichen Verlauf signifikant, entartet die Näherungslösung für die Abstandsfunktion mit zunehmender Anzahl an ausgewerteten Zeitscheiben. Aus diesem Grund wird die Abstandsfunktion für eine gute Näherungslösung in zeitlichen Abständen reinitialisiert. Mit dem Ziel einer

zeiteffizienten Reinitialisierung sind die kürzesten Abstände der Knoten eines Finite-Elemente-Netzes zu einer Oberfläche mit der Fast-Marching Methode [56] berechnet.

Im Folgenden ist der Ablauf der Reinitialisierung in Kürze dargestellt. Zuerst ist das Vorzeichen der vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion an jedem Knoten abgespeichert. Danach ist die implizit beschriebene Form der Oberfläche mit einer Vielzahl von Dreiecken im Raum facettenartig angenähert (vergleiche Kapitel 4.2). Anschließend sind mit der Brute-Force-Methode an den Knoten nahe der Oberfläche die Abstandswerte neu berechnet, mit denen die Fast-Marching-Methode initiiert ist. Dabei ist deren Status eines entfernt liegenden Knotens auf den Status eines Testknotens geändert (siehe Abbildung 5.7). Die Anwendung der Fast-Marching-Methode beinhaltet die Berechnung einer Näherungslösung für die Eikonalgleichung. Für die Berechnung einer Näherungslösung nach SETHIAN [57] ist in einem nächsten Schritt das räumliche Gebiet tesseliert. Nach der Tesselation des räumlichen Gebietes ist dann mit der Fast-Marching-Methode der Abstand eines jeden Knotens neu berechnet. Zuletzt wird allen Knoten das zuvor abgespeicherte Vorzeichen der Abstandsfunktion zugewiesen, so dass die Teilgebiete den materiellen Körpern eindeutig zugeordnet sind. Die Brute-Force-Methode und Fast-Marching-Methode sind nachfolgend näher beschrieben.

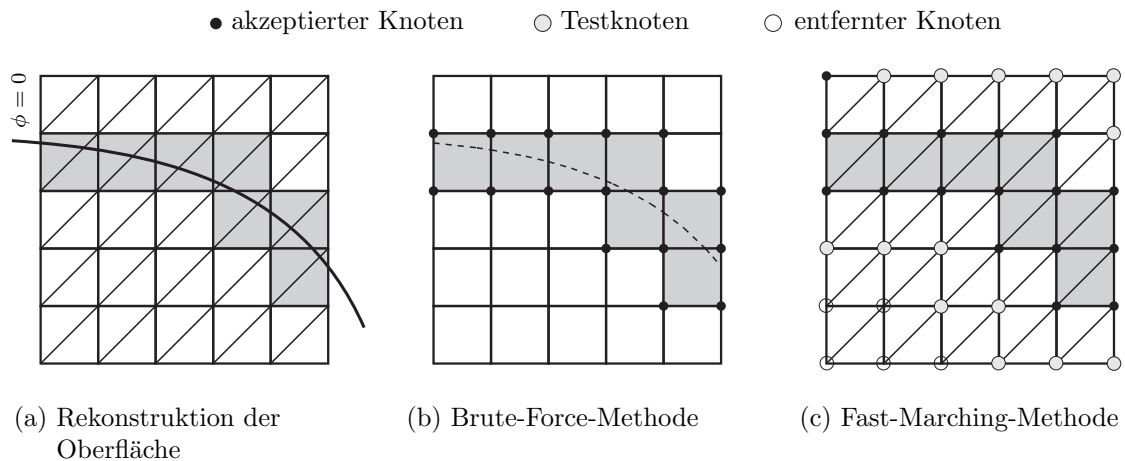


Abbildung 5.7: Ablauf der Reinitialisierung

Brute-Force-Methode

Mit der Brute-Force Methode wird der kürzeste Abstand eines Knotens zu einer Oberfläche auf Grundlage geometrischer Beziehungen bestimmt. Die Oberfläche ist mit ihrer Rekonstruktion aus einer Vielzahl von Dreiecken zusammengesetzt, so dass die Methodik nachfolgend an einer Oberfläche in Form eines ebenen Dreiecks dargestellt ist.

Der kürzeste Abstand eines Raumpunktes zu einer Ebene ist mit deren mathematischer Darstellung in der Hesse'schen Normalform [10] berechnet, so dass jeweils drei Raumpunkte gleichen Abstandes die in Abbildung 5.8a dargestellten parallelen Flächen aufspannen. Da die Ebene eines Dreiecks mit Geraden begrenzt ist, ist der kürzeste Abstand eines Raumpunktes im Bereich der Geraden mit der Geradengleichung in Hesse'scher Normalform bestimmt, derzufolge die parallelen Flächen gleichen Abstandes in Abbildung 5.8b entlang der Geraden mit zylindrisch gekrümmten Flächen verbunden sind. Unter Berücksichtigung, dass der kürzeste Abstand eines Raumpunktes in der Nähe eines Eckpunktes mit der Länge des verbindenden Vektors beschrieben ist, ist die Fläche gleichen Abstandes allseitig geschlossen (siehe Abbildung 5.8c).

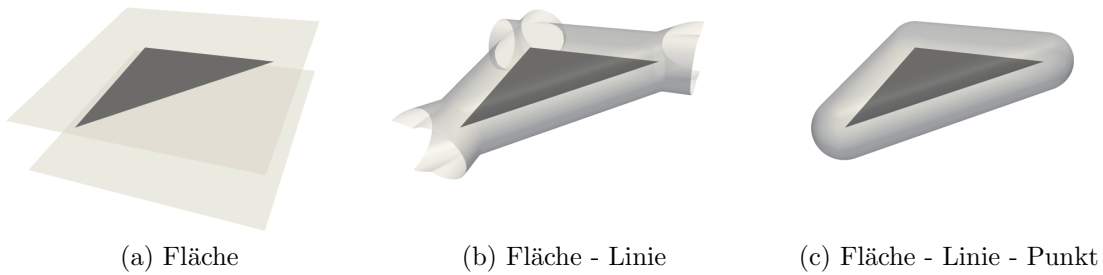


Abbildung 5.8: Auswertung der Abstandsfunktion für $\phi = \text{konstant}$

Nach Anwendung der Brute-Force-Methode auf eine mit ebenen Dreiecken segmentierte Oberfläche ist deren Lage verschoben. Die Veränderung der Werte der Abstandsfunktion an den Knoten nahe der segmentierten Oberfläche ist mit Abbildung 5.9 verdeutlicht. Sie zeigt zwei quadratische Elemente mit partiell gekrümmter Oberfläche. Weiterhin ist mit der gestrichelten Linie die rekonstruierte Oberfläche eingezeichnet. Sie weicht im rechten Element von der ursprünglich gekrümmten Oberfläche ab, so dass der Wert der Abstandsfunktion am Knoten A nach dessen Reinitialisierung verändert ist. Er ist derart verändert, dass die Oberfläche nach der Reinitialisierung in das konvex berandete Teilgebiet verschoben ist.

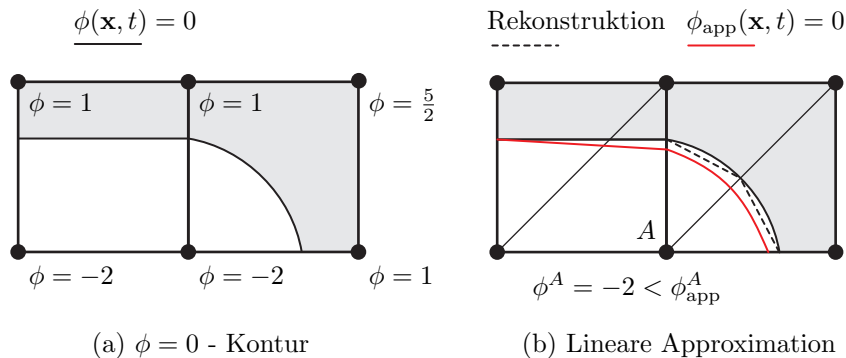


Abbildung 5.9: Reinitialisierung der Abstandsfunktion

Fast-Marching-Methode

Mit der Fast-Marching-Methode ist eine Näherungslösung für die spezielle Eikonalgleichung

$$\|\nabla\phi(\mathbf{x})\| = 1 \quad (5.6)$$

berechnet, mit der die Funktion $\phi(\mathbf{x})$ den kürzesten Abstand zu einer Oberfläche beschreibt, wenn die Länge ihres Gradienten an jeder Stelle im Raum identisch eins ist. Dabei ist berücksichtigt, dass sich die Abstandsfunktion, von der freien Oberfläche ausgehend, stets positiv entwickelt. Mit dieser Charakteristik wird die Näherungslösung für die Werte der Abstandsfunktion an den Knoten eines Finite-Elemente-Netzes mit Anwendung der Fast-Marching-Methode sukzessive berechnet. Dazu sind in einem ersten Schritt die Elemente in geometrischer Form eines Hexaeders und in spezieller Form eines Würfels für eine Approximation des Gradienten nach SETHIAN [57] in jeweils sechs Tetraeder unterteilt. Anschließend wird der Abstand der Knoten mit dem Status eines Testknotens mit der Näherungslösung für die Eikonalgleichung neu berechnet. Dabei ist der Gradient mit den bereits berechneten Werten der Abstandsfunktion in benachbarten Tetraedern ausgewertet, deren Knoten alle mit dem Status eines akzeptierten Knotens belegt sind. Mit den linearen Lagrange-Ansätzen für die Abstandsfunktion in den Elementen ist der Gradient in den Tetraedern nach Sethian als konstant angenähert. Nachdem der Abstand der nächstgelegenen Knoten näherungsweise berechnet ist, ist mit einem Suchalgorithmus der Knoten mit dem kleinsten Abstandswert bestimmt und mit dem Status eines akzeptierten Knotens belegt. Danach ist die Menge der Testknoten um Knoten nahe des neu akzeptierten Knotens erweitert, deren Status fortan mit dem eines Testknotens beschrieben ist. Mit dem zuvor beschriebenen Ablauf sind sukzessive die Abstände an allen Knoten reinitialisiert. Obwohl der Suchalgorithmus nur auf Knoten mit dem Status eines Testknotens angewendet wird, ist die Schnelligkeit der Fast-Marching-Methode im Wesentlichen mit der Schnelligkeit des Suchalgorithmus bestimmt. Für eine effiziente Suche wird der Quickselect-Algorithmus nach HOARE [31] verwendet (vergleiche SETHIAN [56]).

Analyse der Zeiteffizienz

Die Effizienz des zuvor beschriebenen Algorithmus wird bezüglich der Rechenzeit an einem würfelförmigen Gebiet mit gekrümmter Oberfläche zwischen den Teilgebieten untersucht (siehe Abbildung) 5.10. Neben einer Reinitialisierung mit der Fast-Marching-Methode ist für einen Vergleich der Rechenzeiten der Wert der Abstandsfunktion an jedem Knoten alternativ mit der Brute-Force-Methode neu berechnet. Neben der Lage der gekrümmten Oberfläche ist für beide Methoden in Abbildung 5.10 auch die reinitialisierte vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion und deren kleinster und größter Wert für 40^3 Elemente angegeben.

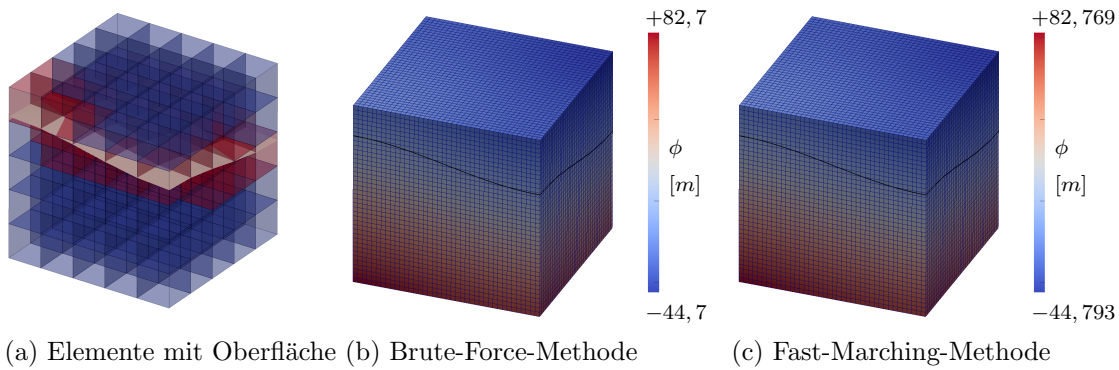


Abbildung 5.10: Abstandsfunktion in einem Würfel

Die maximalen Abstandswerte zeigen, dass für feinelementierte Gebiete der Gradient der Abstandsfunktion mit deren linearer Approximation im Tetraeder hinreichend genau für eine Näherungslösung der Eikonalgleichung nach Sethian beschrieben ist. Dass sich die Abstandswerte im Vergleich nur geringfügig unterscheiden, ist mit der moderaten Krümmung der Oberfläche und der Regelmäßigkeit des Finite-Elemente-Netzes begründet.

Der Vergleich der Zahlenwerte in Tabelle 5.1 lässt erkennen, dass sich die erforderliche Rechenzeit für eine Reinitialisierung nach der Brute-Force-Methode nicht linear mit der Anzahl an Elementen entwickelt. Besonders deutlich zeigt sich die Schnelligkeit der Fast-Marching-Methode bei der Reinitialisierung feinelementierter Gebiete. Ist das Gebiet lediglich mit 5^3 Elementen beschrieben, sind die Werte der Abstandsfunktion an den Knoten mit beiden Methoden nahezu gleich schnell reinitialisiert. Setzt sich das Gebiet hingegen aus 40^3 Elementen zusammen, ist im Vergleich mit der Brute-Force-Methode das Gebiet mit der Fast-Marching-Methode fast siebenmal schneller reinitialisiert. Die Rechenzeiten zeigen, dass mit der Fast-Marching-Methode ein zeiteffizienter Algorithmus für die Berechnung der Abstandswerte an einer Vielzahl von Knoten angewendet werden kann.

\sum Elemente	125	1.000	8.000	64.000
\sum Elemente mit Oberfläche	33	131	507	2.037
$t_{\text{Brute-Force}}$	t_{ref}	$\approx 25 t_{\text{ref}}$	$\approx 660 t_{\text{ref}}$	$\approx 20.000 t_{\text{ref}}$
$t_{\text{Fast-Marching}}$	$\approx 0,88 t_{\text{ref}}$	$\approx 11 t_{\text{ref}}$	$\approx 153 t_{\text{ref}}$	$\approx 2.910 t_{\text{ref}}$
$t_{\text{Brute-Force}}/t_{\text{Fast-Marching}}$	1,14	2,27	4,31	6,87

Tabelle 5.1: Rechenzeiten

6 Lösungsverfahren

Die numerische Analyse der Entleerung von Silos beinhaltet die Lösung von randgekoppelten Mehrfeldsystemen. So wird zunächst die simultane Lösung der diskretisierten Modellgleichungen nach Kapitel 3.2 untersucht, bevor die verwendete Methodik für die Lösung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit freien Oberflächen dargestellt wird.

6.1 Simultane Lösung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen

Eine schwache Kopplung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen ist mit der Lösungsstrategie gegeben, die in Abbildung 6.1a dargestellt ist. Bei schwacher Kopplung wird das Strömungsfeld des Fluids und der Verformungszustand der Struktur in einem Zeitschritt einmalig und nacheinander ausgewertet, so dass der Informationsaustausch zwischen Fluid und Struktur mit dem Spannungszustand und den Bewegungen des gemeinsamen Randes nach Gleichung (2.48) und (2.49) nur in eine Richtung erfolgt. Damit ist eine Näherungslösung für das Strömungsfeld auf Grundlage eines Fluidgebietes ermittelt, das mit der Strukturverformung des vorhergehenden Zeitschrittes konform ist. Mit der einmaligen Aktualisierung des Fluidgebietes ist die Güte der Näherungslösung bei ausgeprägten Strukturverformungen deutlich von der gewählten Zeitschrittweite abhängig. Mit dem Ziel eine gute Näherungslösung für die Entleerung von Silos mit akzeptablen Zeitschritten berechnen zu können, wird daher eine Lösungsstrategie gewählt, mit der die Gebiete des Fluids und der Struktur stark gekoppelt sind. Während die Lösung der diskretisierten Modellgleichungen mit den Lösungsstrategien in Abbildung 6.1b bis 6.1d identisch ist, ist die Konvergenz der Freiwerte des Fluids und der Struktur von der Kopplung zwischen den Gebieten abhängig. Sind die Modellgleichungen für Fluid und Struktur mit der Lösungsstrategie nach Abbildung 6.1b gelöst, können die Randspannungen bei einer zu großen Zeitschrittweite zu einer Divergenz in den Lösungsfeldern führen. Mit der Ratenformulierung der Modellgleichungen der Struktur können die Geschwindigkeiten entlang des gemeinsamen Randes zwischen den Gebieten stark gekoppelt werden. Das Schema der mit der starken Kopplung ermöglichten simultanen Lösung der diskretisierten Modellgleichungen ist in Abbildung 6.1c dargestellt. Mit der simultanen Lösung ist die Möglichkeit gegeben, dass bei einer gegebenen Zeitschrittweite auch dann eine Näherungslösung berechnet werden kann, wenn sie im Fall einer gestuften Berechnung nach Abbildung 6.1b bereits divergiert. Die für die numerische Analyse der Entleerung von Silos verwendete Lösungsstrategie schließt die Pseudo-Struktur für die Netzverformung mit ein und ermöglicht zusammen mit dem

Newton-Raphson-Verfahren eine quadratische Konvergenz der Lösungsvektoren der nichtlinearen Gleichungssysteme von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen.

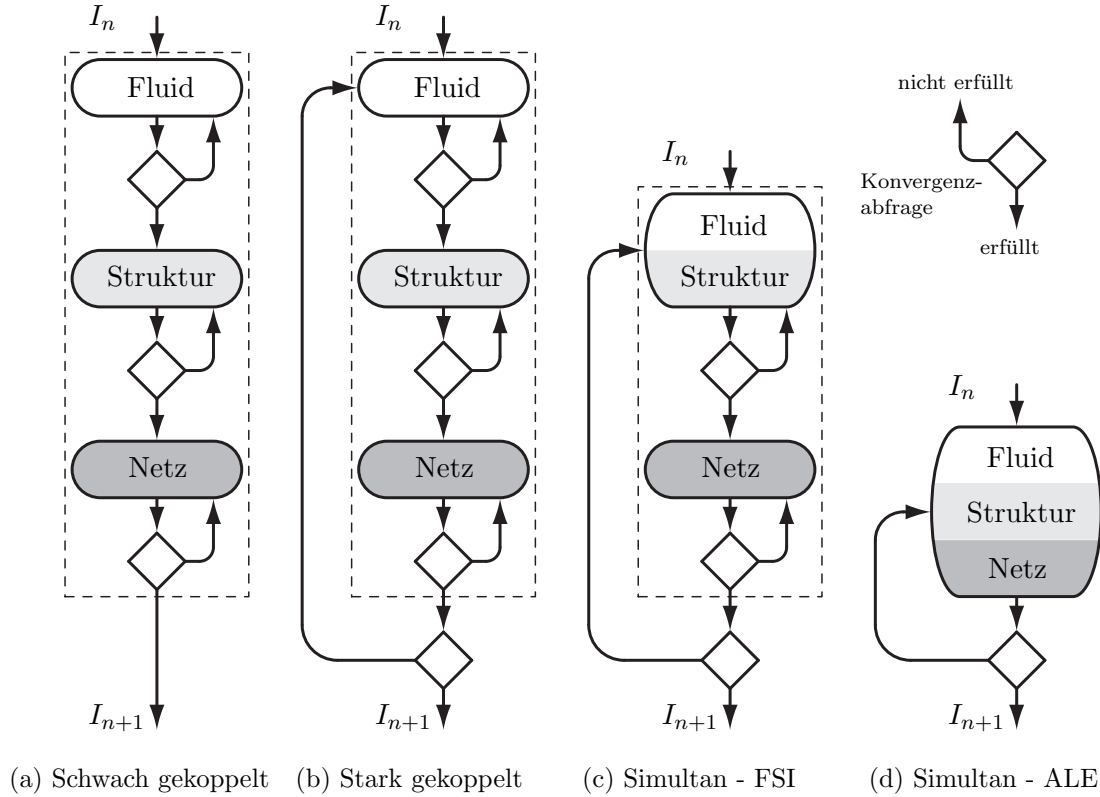


Abbildung 6.1: Lösungsstrategien für randgekoppelte Mehrfeldsysteme

Nach dem Newton-Raphson-Verfahren ist eine bessere Näherung für den Lösungsvektor $\hat{\mathbf{z}}$ im Iterationsschritt i mit der Gleichung

$$\hat{\mathbf{z}}^{i+1} = \hat{\mathbf{z}}^i - \mathbf{K}(\hat{\mathbf{z}})^{-1}_{\hat{\mathbf{z}}^i} \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{z}}^i} \quad (6.1)$$

bestimmt. Sie ist mit der Systemmatrix \mathbf{K} definiert, deren Elemente mit

$$K_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial \hat{z}_j} \quad (6.2)$$

die Ableitungen der gewichteten Residuen r_i der Finite-Element-Formulierungen nach den Unbekannten des Lösungsvektors darstellen.

Der Aufbau des mit Gleichung (6.1) zu lösenden Gleichungssystems ist für inkompressible Fluide in Abbildung 6.2 dargestellt. Es verdeutlicht mit der Überschneidung der Matrizen \mathbf{K}^S und \mathbf{K}^F die starke Kopplung zwischen den Gebieten von Fluid und Struktur. Die Untermatrix der Pseudo-Struktur, mit der das Gebiet des Fluids an die deformierbare Berandung der Struktur angepasst ist, ist ausschließlich kinematisch mit den Untermatrizen des Fluids und der Struktur gekoppelt. Mit der

einseitigen Kopplung ist sichergestellt, dass die Pseudo-Struktur keinen Einfluss auf die Verformungen der realen Struktur hat. Neben der kinematischen Kopplung der Pseudo-Struktur mit den Systemverformungen ist mit der Untermatrix $\frac{\partial \mathbf{r}^F}{\partial \hat{\mathbf{v}}^N}$ der Einfluss der Netzverformung auf den zu berechnenden Lösungsvektors festgelegt. Die Veränderung des Lösungsvektors wird in Bezug auf die Eigenschaften der Systemmatrizen von dünnwandigen Strukturen mit einem direkten Löser bestimmt (siehe Kapitel 3.2.1.4).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^S & & & \\ & & & \\ & & \mathbf{K}^F & \frac{\partial \mathbf{r}^F}{\partial \hat{\mathbf{v}}^N} \\ & & \mathbf{D}^N & \mathbf{K}^N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{v}}^S \\ \Delta \hat{\mathbf{v}}^F \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}^F \\ \Delta \hat{\mathbf{v}}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^S \\ \mathbf{r}^F \\ \\ \mathbf{r}^N \end{bmatrix}$$

Abbildung 6.2: Gekoppeltes Gleichungssystem

Für die numerische Untersuchung von Mehrfeldsystemen wird ein Finite-Elemente-Programm mit objektorientierter Programmierung verwendet. Die Struktur des mit MATLAB[®] entwickelten Finite-Elemente-Programms ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Es ist in die wesentlichen Bestandteile

- Datenerzeugung,
- FE-Programm und
- Auswertung der Ergebnisse

unterteilt. Zuerst werden die Daten des mit GID generierten Finite-Elemente-Netzes eingelesen. Nach dem Aufbau und der Lösung des Gleichungssystems folgt die Ablage des Lösungsvektors im hdf5-Format. Sind alle Zeitschritte berechnet, liegen die xfm-Dateien vor, mit denen Paraview auf die zuvor angelegten hdf5-Dateien für eine Visualisierung der Näherungslösung zurückgreift.

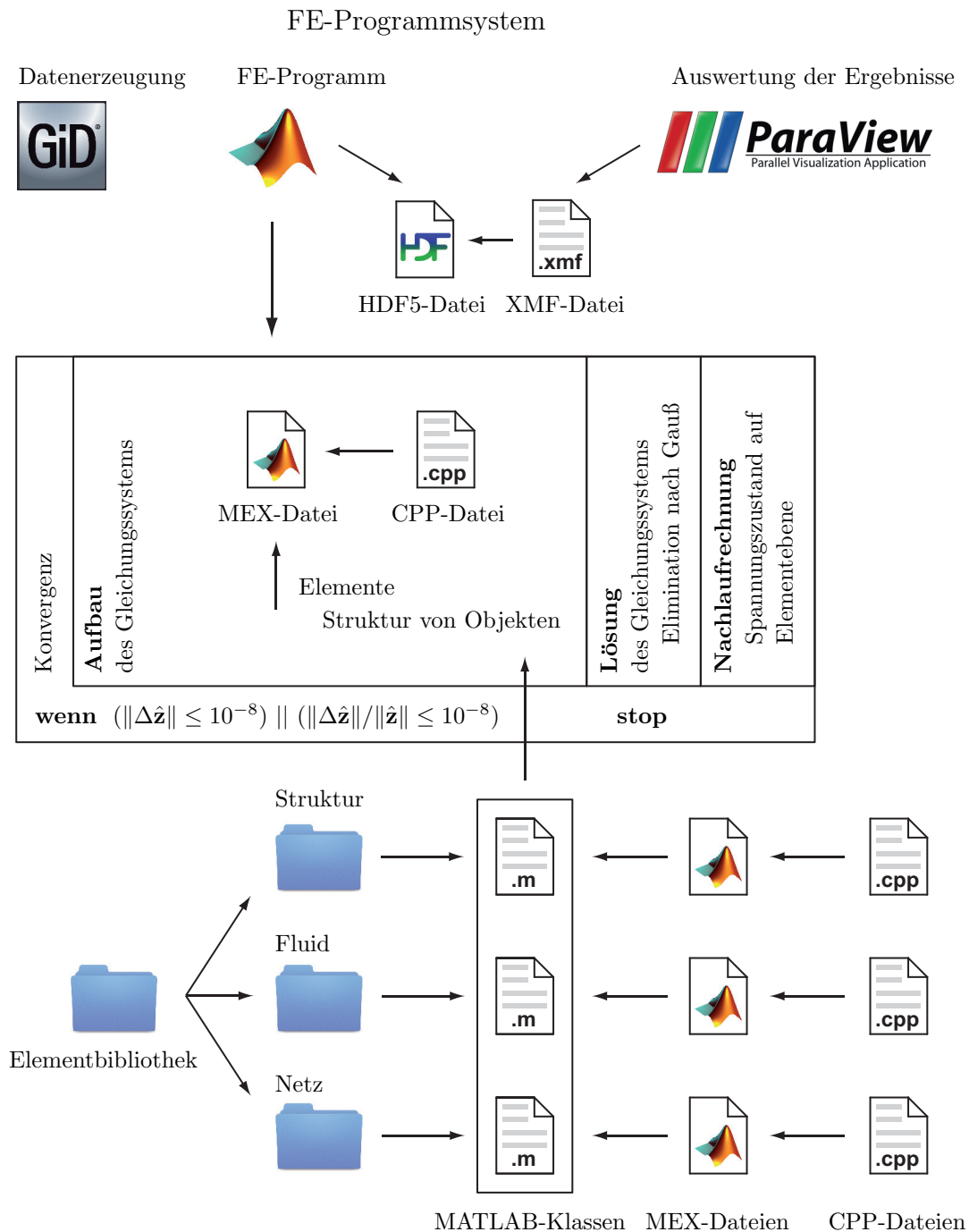


Abbildung 6.3: Programmstruktur - objektorientierte Programmierung

Für eine signifikante Beschleunigung des in MATLAB[®] entwickelten Finite-Elemente-Programms sind die Elementroutinen und die Routine für den Aufbau des Gleichungssystems außerdem in C++ programmiert. So sind zusammen mit der template-basierten EIGEN-Bibliothek [75] die Operationen der linearen Algebra zeiteffizient ausgewertet. Die Schnittstelle zwischen den Programmiersprachen ist mit der in MATLAB[®] enthaltenen MEX-Bibliothek gegeben.

6.2 Gestaffelte Lösung von Mehrfeldsystemen mit freien Oberflächen

Im Folgenden ist die gestaffelte Lösung von Mehrfeldsystemen mit freien Oberflächen dargestellt. Dabei ist zwischen Zwei-Fluid-Strömungen und Ein-Fluid-Strömungen unterschieden, die mit der *XFEM* beziehungsweise der *fragmented finite element method* (*FFEM*) einer numerischen Analyse zugänglich sind. Die *FFEM* ist aus der *XFEM* entwickelt. Aus diesem Grund ist zuerst das Lösungsschema der *XFEM* mit ihrem veränderlichen Aufbau des Gleichungssystems beschrieben. Weiterhin wird mit dem Ziel von gut konditionierten Gleichungssystemen die Heuristik erklärt, mit der zu vernachlässigende Anreicherungen eliminiert werden. Auf dem Lösungsschema der *XFEM* aufbauend, wird anschließend die *FFEM* eingeführt. Für einen verbesserten Transport der Abstandsfunktion wird die Methodik dargestellt, mit der Geschwindigkeitsfelder extrapoliert werden. Mit der selben Methodik sind auch Dichtefelder extrapoliert, um zu gültigen Startwerten für das Newton-Raphson-Verfahren zu gelangen. Die extrapolierten Felder sind in das Lösungsschema eingebunden, das nachfolgend beschrieben wird.

6.2.1 Zwei-Fluid-Strömungen

Die numerische Analyse von Zwei-Fluid-Strömungen mit freien Oberflächen umfasst die Lösung der Level-Set-Gleichung (5.1), die mit den Geschwindigkeiten an das Strömungsfeld der beiden Fluide gekoppelt ist. Die Anwendung des Newton-Raphson-Verfahrens erfordert die Linearisierung der diskretisierten Modellgleichungen der Fluide nach den Freiwerten der Abstandsfunktion. Die Linearisierung nach den Freiwerten der Abstandsfunktion umfasst bei freien Oberflächen die Linearisierung nach den Positionen und Wichtungen der Integrationspunkte in angereicherten Elementen, derzufolge die Auswertung ihrer Elementmatrix mit einem hohen numerischen Aufwand verbunden ist. Des Weiteren kann die Konvergenz des Lösungsvektors nur nachgewiesen werden, wenn sich der Ansatzraum innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens nicht ändert und sich damit eine freie Oberfläche nicht in benachbarte Elemente bewegt.

Während der Entleerung eines Silos ist keine signifikante Verwerfung der freien Oberfläche des Schüttgutes zu erwarten. Vielmehr ist von einer gemäßigten Bewegung der Oberfläche auszugehen. So wird mit der Annahme einer schwachen Kopplung zwischen den Modellgleichungen der Fluid-Struktur-Wechselwirkung und der Level-Set-Gleichung für die Bewegung der freien Oberfläche das in Abbildung 6.4 dargestellte gestaffelte Lösungsschema verwendet.

Mit dem Lösungsschema wird die Näherungslösung für das Strömungsfeld der beiden Fluide bei fixierter Lage der freien Oberfläche weiterhin mit dem Newton-Raphson-Verfahren berechnet, während die Näherungslösung für die Abstandsfunktion mit einer Fixpunktiteration bestimmt wird. Berechnungen mit einer Fixpunktiteration für die Abstandsfunktion zeigen, dass die Lage der freien Oberfläche mit wenigen Itera-

tionsschritten bestimmt ist, wenn die Level-Set-Gleichung mit physikalisch gültigen Geschwindigkeiten ausgewertet ist. Weiterhin kann mit der gestaffelten Lösung der Modellgleichungen die Größe und Belegung des Gleichungssystem innerhalb der Newton-Raphson-Iteration aufrecht erhalten und damit die Rechenzeit verringert werden.

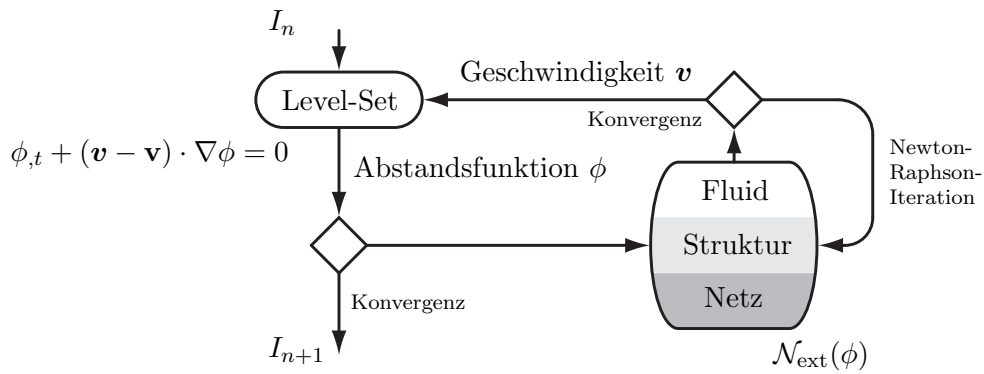


Abbildung 6.4: Fixpunktiteration für Zwei-Fluid-Strömungen

Die Anzahl der angereicherten Elemente ist von der Form und Lage der freien Oberfläche abhängig, so dass sich die Größe und Struktur der Systemmatrizen verändert. Mit dem Ziel einer geringeren Bandbreite sind die Freiwerte der Anreicherungen knotenweise nach den Freiwerten der Lagrange-Polynome angeordnet. Eine mögliche Belegung der Systemmatrix für angereicherte Elemente ist in Abbildung 6.5 dargestellt.

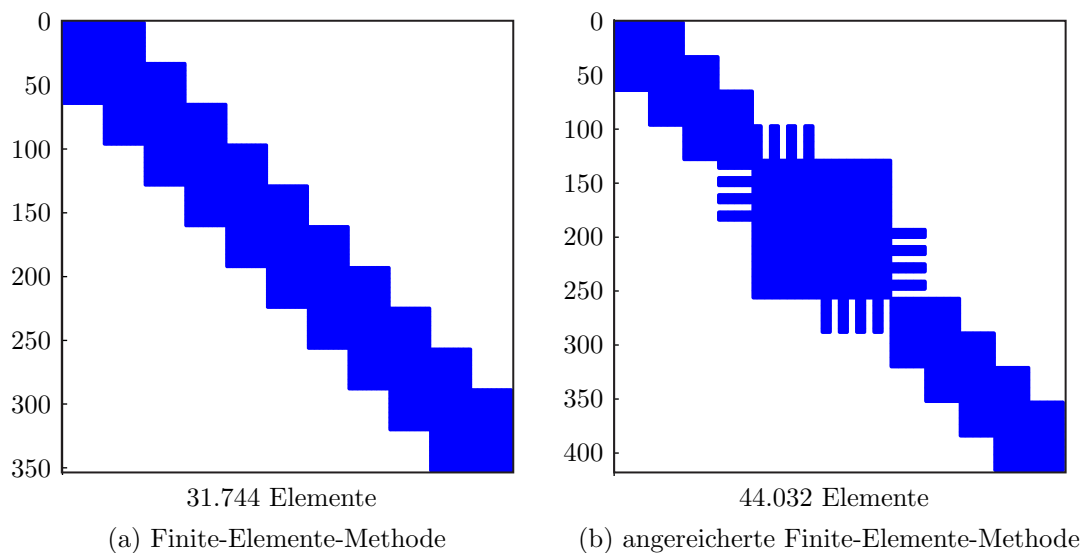


Abbildung 6.5: Struktur der veränderlichen Systemmatrix

Bei der an der Bandbreite der Systemmatrix orientierten Belegung ist zu berücksichtigen, dass sich die Position aller Freiheitsgrade im Gleichungssystem über die Zeitscheiben hinweg ändern kann. Nähert sich die freie Oberfläche einem Finite-Element-Knoten, verringert sich der Einfluss einiger Anreicherungen auf die Näherungslösung für das Strömungsfeld. Der Einfluss der Lage der Oberfläche auf die Konditionierung einer Systemmatrix ist mit Abbildung 6.6 verdeutlicht.

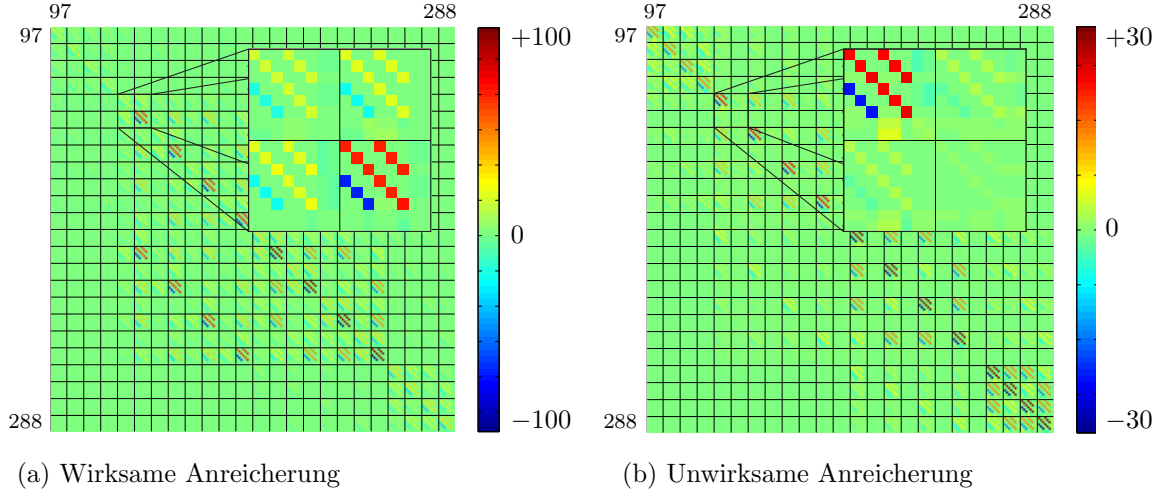


Abbildung 6.6: Zahlenwerte der besetzten Elemente von Systemmatrizen

Abbildung 6.6 zeigt Auszüge aus der Systemmatrix nach Abbildung 6.5 für zwei unterschiedliche Lagen der freien Oberfläche und folgt mit

$$\hat{\mathbf{z}}_{N_{\text{XFEM}}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{\text{std},N} \\ \tilde{\mathbf{z}}_{\text{ext},N} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

mit $\hat{\mathbf{z}}_{\text{std},N} = \left[\hat{\mathbf{v}}_{x,N}^{t_n^+} \quad \hat{\mathbf{v}}_{y,N}^{t_n^+} \quad \hat{\mathbf{v}}_{z,N}^{t_n^+} \quad \hat{\mathbf{v}}_{x,N}^{t_{n+1}^-} \quad \hat{\mathbf{v}}_{y,N}^{t_{n+1}^-} \quad \hat{\mathbf{v}}_{z,N}^{t_{n+1}^-} \quad \hat{\mathbf{p}}_N^{t_n^+} \quad \hat{\mathbf{p}}_N^{t_{n+1}^-} \right]^T$

und $\tilde{\mathbf{z}}_{\text{ext},N} = \left[\tilde{\mathbf{v}}_{x,N}^{t_n^+} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{y,N}^{t_n^+} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{z,N}^{t_n^+} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{x,N}^{t_{n+1}^-} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{y,N}^{t_{n+1}^-} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{z,N}^{t_{n+1}^-} \quad \tilde{\mathbf{p}}_N^{t_n^+} \quad \tilde{\mathbf{p}}_N^{t_{n+1}^-} \right]^T$

als Reihenfolge der Freiheitsgrade der angereicherten Finite-Element-Knoten. Die Zahlenwerte der besetzten Elemente der Systemmatrizen zeigen im Vergleich den auf die Näherungslösung verringerten Einfluss einiger Anreicherungen, wenn sich die freie Oberfläche in die Nähe von Finite-Element-Knoten bewegt (siehe Abbildung 6.6b). Ist der Abstand der freien Oberfläche hingegen zu allen Finite-Element-Knoten groß genug, sind die Anreicherungen voll wirksam (siehe Abbildung 6.6a).

Verläuft die freie Oberfläche entlang der Elementkanten, ist der Knick im Geschwindigkeitsfeld mit den elementweise formulierten Lagrange-Polynomen bereits abgebildet. Ist die Oberfläche in diesem Bereich nicht gekrümmt oder kann die Wirkung

erfüllt und damit kleiner ist als ein mit der Toleranz ϵ_{tol} modifizierter Mittelwert der mit Lagrange-Polynomen ermittelten Wichtungen angereicherter Element-Knoten. Mit Ungleichung (6.4) ist berücksichtigt, dass die Anreicherungen im Allgemeinen über die Gebiete mehrerer Elemente definiert sind. Der Anteil eines Elementes an der Wichtung des Residuums zu einer normierten sgn-Anreicherung ist in Abbildung 6.7 graphisch dargestellt. Am Beispiel des sechsten Knotens ist ersichtlich, dass der Anteil des zweiten und sechsten Elementes an dem Integral $\int M_i dQ$ für die gegebene Lage der freien Oberfläche versch über das Gebiet des fünften Elementes ist die dazugehörige Anreicherung als wirksam

Die in Kapitel 4.2 dargestellte Parkettierung angereicherter Elemente endet mit einer Vielzahl von Integrationspunkten für die Auswertung ihrer Elementmatrizen (vergleiche SUDHAKAR [59] und KIM [40]). Aus diesem Grund werden für einen schnelleren Aufbau des Gleichungssystems die Elemente parallel ausgewertet. Dass die Auswertung angereicherter Elemente um ein Vielfaches aufwändiger ist als die Auswertung von nicht angereicherten Elementen, ist mit der in Abbildung 6.8 dargestellten optimierten Zerlegung des Berechnungsgebietes berücksichtigt, mit der die Elemente in Abhängigkeit der Lage der freien Oberfläche einzelnen *Threads* zugewiesen sind. Die sich mit der Bewegung der freien Oberfläche verändernde Zerlegung des Berechnungsgebietes zeigt, dass die einzelnen *Threads* nahezu gleich lange beansprucht sind.

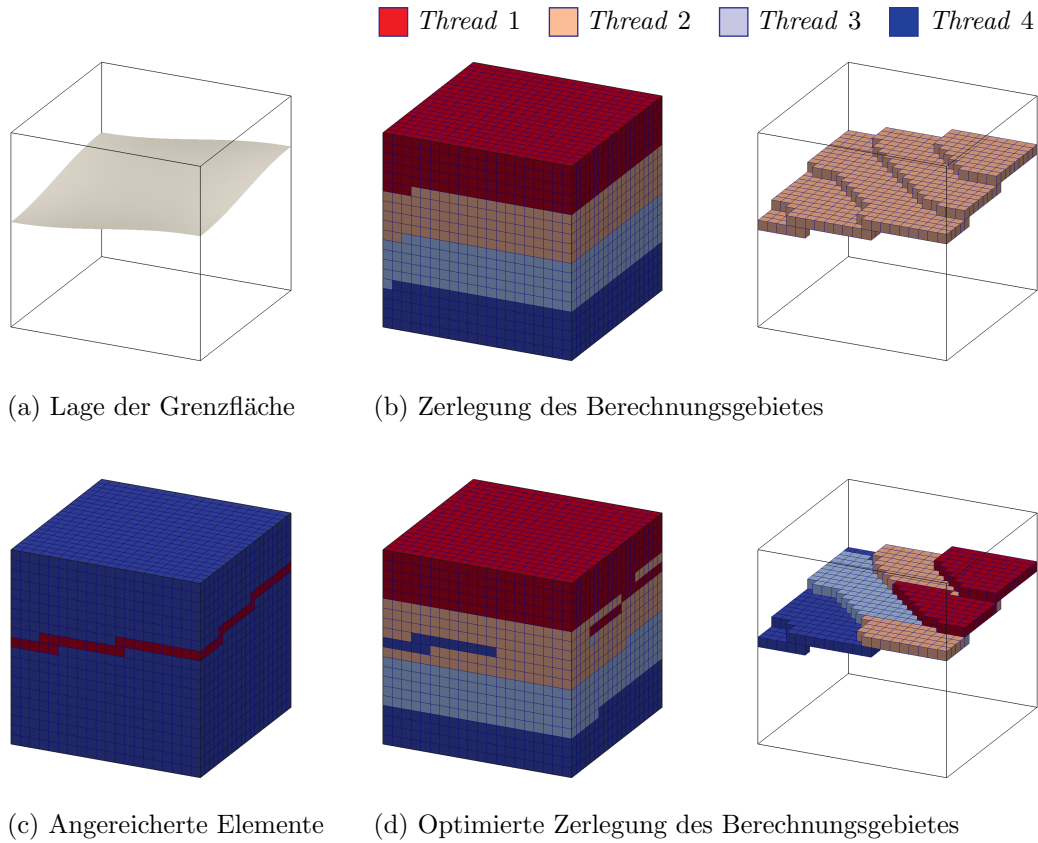


Abbildung 6.8: Parallele Auswertung der Elemente

Fluidwelle im Tank

Der Einfluss von 6.4 auf die Masseerhaltung inkompressibler Fluide wird mit der Bewegung einer freien Oberfläche in einem Tank untersucht. Die Modellparameter der Zwei-Fluid-Strömung sind in Abbildung 6.9 angegeben. Die freie Oberfläche ist mit einer sinusförmigen Welle der Amplitude $a = 10^{-2} m$ in Bewegung gesetzt. Mit der Viskosität und Dichte des Fluids oberhalb der freien Oberfläche ist die Grenzschicht bereits mit 40×60 Elementen für eine lineare Approximation der Geschwindigkeiten hinreichend aufgelöst. Mit dem freien Rand des nach oben offenen Tanks ist sichergestellt, dass materielle Punkte im Gebiet Ω_2 ungehindert strömen können, so

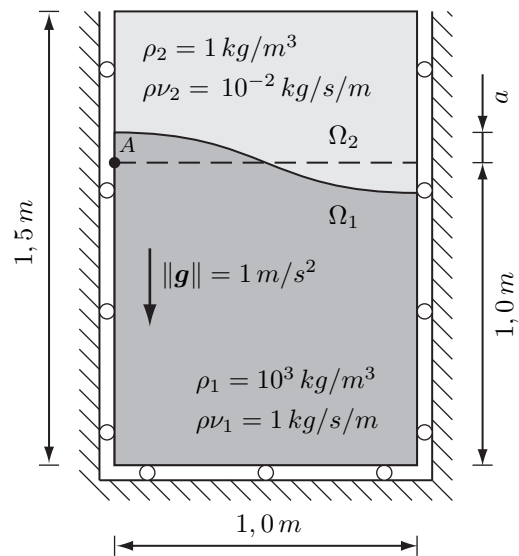


Abbildung 6.9: Fluidmodell

dass die Bewegung der freien Oberfläche vorrangig von den mechanischen Eigenschaften des Fluids im Gebiet Ω_1 bestimmt ist. Zusammen mit der im Verhältnis zu den Geometrie- und Materialparametern geringen Amplitude der Fluidwelle, ist das Strömungsverhalten im Gebiet Ω_1 nur unwesentlich vom konvektiven Term der materiellen Zeitableitung der Impulsdichte beeinflusst. Mit der Annahme, dass die materielle Zeitableitung allein mit der lokalen Zeitableitung bestimmt ist, löst WU [68] das vorliegende Strömungsproblem für die lineare Impulsgleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mu_L \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p - \rho_0 \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (6.5)$$

Die analytische Lösung ist mit der Auslenkung der freien Oberfläche für die zuvor definierten Modellparameter in Abbildung 6.10 dargestellt. Sie ist um Näherungslösungen ergänzt, die mit unterschiedlichen Methoden bestimmt sind.

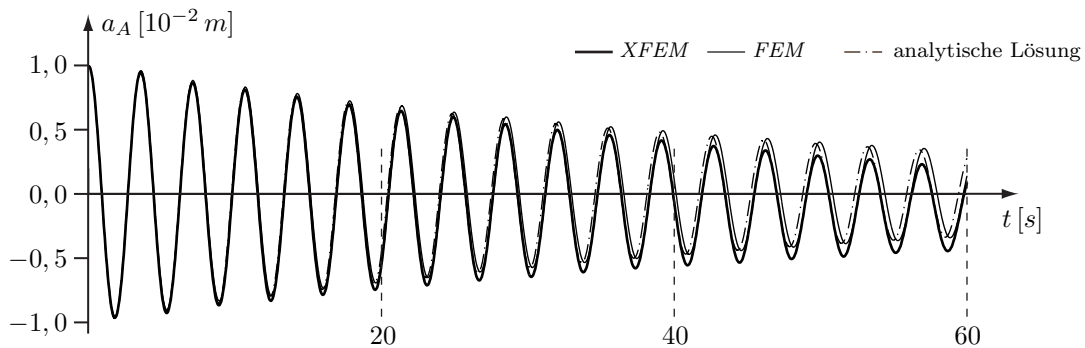


Abbildung 6.10: Auslenkung der Oberfläche

Mit der *XFEM* ist eine Näherungslösung für $\epsilon_{tol} = 10^{-6}$ und eine Reinitialisierung der Abstandsfunktion nach jedem Zeitschritt berechnet. Alternativ ist eine Näherungslösung mit der *FEM* bestimmt, die eine Adaptation des Finite-Elemente-Netzes an die Bewegung der freien Oberfläche beinhaltet. Der Vergleich der Zeitverläufe zeigt, dass sich beide Näherungslösungen phasenverschoben zu der analytischen Lösung entwickeln. Während die Amplitude mit beiden Methoden nahezu gleichwertig abgebildet ist, verliert das Fluid im Gebiet Ω_1 mit der Absenkung der freien Oberfläche zunehmend an Masse, wenn eine Näherungslösung mit der *XFEM* berechnet ist. Die Masse des Fluids im Gebiet Ω_1 ist nach jedem Zeitschritt bestimmt und bezogen auf dessen Wert zum Zeitpunkt t_0 in Abbildung 6.11 hervorgehoben dargestellt. Die weiteren Zeitverläufe sind bezüglich der Reinitialisierung, der Heuristik und des zugrunde liegenden Finite-Elemente-Netzes in Tabelle 6.1 zugeordnet. In dem in Abbildung 6.12b im Auszug dargestellten Finite-Elemente-Netz des Typs 2 durchlaufen die materiellen Punkte der freien Oberfläche mehrere Elemente. Im Gegensatz dazu bewegt sich die freie Oberfläche stets in den selben Elementen, wenn das Gebiet mit dem in Abbildung 6.12a dargestellten FE-Netz des Typs 1 um die freie Oberfläche beschrieben ist.

Linie	FE-Netz	\checkmark : an X : aus	
		Heuristik	Reinitialisierung
1a	1	X	X
1b	1	X	\checkmark
2a	2	\checkmark	\checkmark
2b	2	\checkmark	X

Tabelle 6.1: Berechnungsparameter

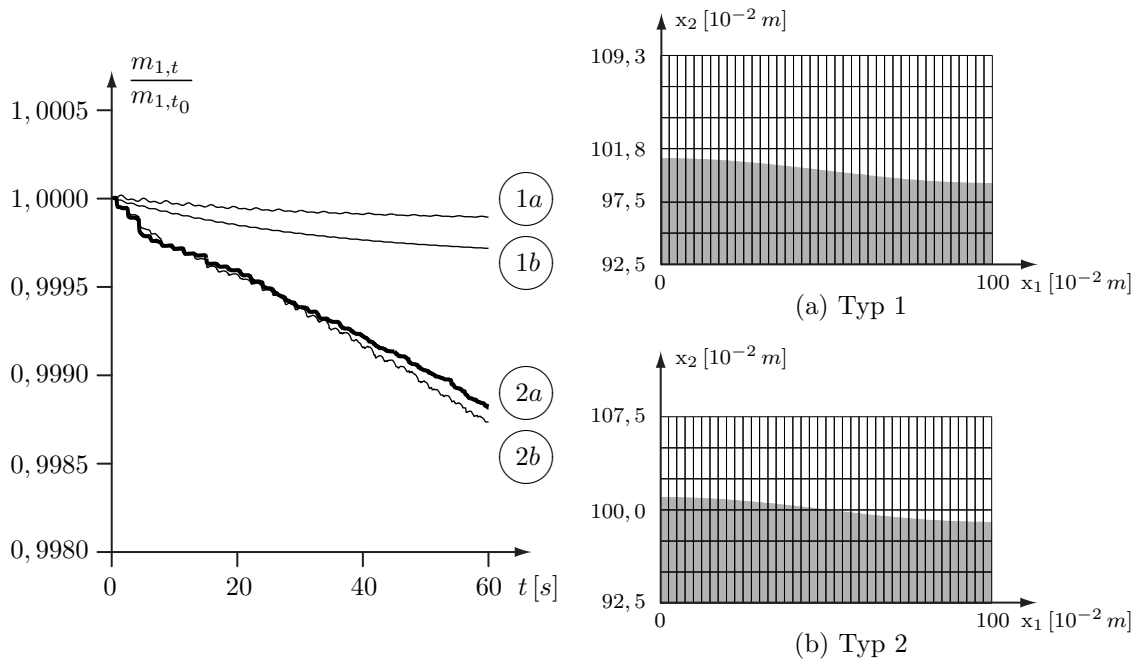


Abbildung 6.11: Masseerhaltungen

Abbildung 6.12: FE-Netze

Der Vergleich der Zeitverläufe zeigt deutlich, dass der Verlust an Masse im Wesentlichen von der Heuristik bestimmt ist, wenn auch die Masse mit der Reinitialisierung der Abstandsfunktion nach jedem Zeitschritt verändert ist. Bei der Bewertung der Ergebnisse ist zu berücksichtigen, dass mit der geringen Amplitude die freie Oberfläche nur mäßig gekrümmt ist, so dass der Einfluss der Reinitialisierung im vorliegenden Fall nur schwach ausgeprägt ist (vergleiche Kapitel 5.2). Liegt auch der Masseverlust im Bereich weniger Promille, so ist unter Beachtung der Rechengenauigkeit im Bezug auf die Lösung der Gleichungssysteme der Parameter ϵ_{tol} so klein wie möglich zu wählen.

6.2.2 Ein-Fluid-Strömungen

Die numerische Analyse der Entleerung befüllter Silos, bei denen die Bewegung des Schüttgutes nicht wesentlich von der angrenzenden Luft beeinflusst ist, ist mit der *FFEM* möglich. Im Gegensatz zu der *XFEM* sind mit der *FFEM* die Verläufe der Beschreibungsvariablen allein mit Lagrange-Polynomen approximiert und die diskretisierten Modellgleichungen nur mit den Elementen ausgewertet, die im Gebiet des Fluids liegen. So liegt der Vorteil der *FFEM* in der zeiteffizienten Berechnung einer Näherungslösung für die Bewegung eines Fluids in einem fein aufgelösten Modellgebiet. Die Approximation der Beschreibungsvariablen mit Lagrange-Polynomen führt auch auf Freiwerte, die Finite-Element-Knoten zugeordnet sind, die außerhalb des Fluidgebietes liegen (siehe Abbildung 6.13).

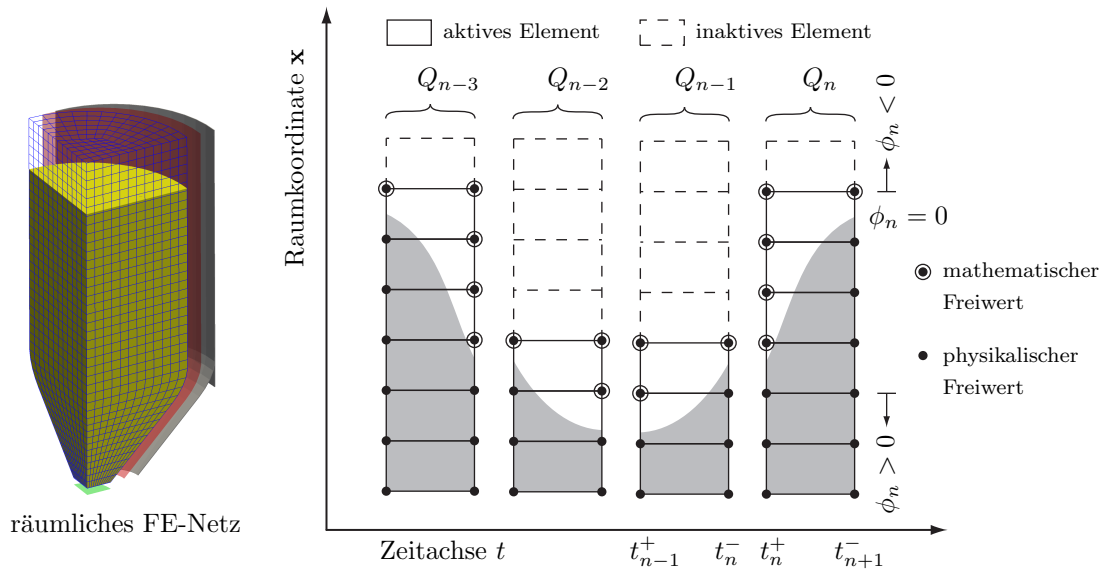


Abbildung 6.13: Extrapolation der Zustandsgrößen

Strömen materielle Punkte eines kompressiblen Fluids mit der freien Oberfläche in neu aktivierte Elemente, sind zu deren Auswertung die zugehörigen Freiwerte des Dichtefeldes mit gültigen Zahlenwerten > 0 zu belegen. Sie sind mit des Extrapolation des Dichtefeldes im Gebiet der Elemente mit ausschließlich physikalischen Freiwerten bestimmt, für die bereits gültige Zahlenwerte berechnet worden sind. Neben dem Dichtefeld ist auch das Geschwindigkeitsfeld mit dem Ziel einer guten Näherungslösung für die Abstandsfunktion extrapoliert. Die extrapolierte Dichte $\tilde{\rho}$ und die extrapolierten Geschwindigkeiten \tilde{v}_i sind nach AUSAS [2] mit den Differentialgleichungen

$$h^2 \nabla^2 \tilde{\rho} = H(\phi(\mathbf{x})) (\tilde{\rho} - \rho) \quad (6.6)$$

beziehungsweise

$$h^2 (\mu_L \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + (\mu_L + \lambda_L) \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})) = H(\phi(\mathbf{x})) (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}) \quad (6.7)$$

definiert. Abgeleitet aus den Navier-Stokes-Gleichungen der Fluidmechanik sind sie mit den Lamé-Konstanten, der Heaviside-Funktion

$$H(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 1 & \text{für } \phi(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

und in Abhängigkeit der charakteristischen Länge h formuliert. Sie beeinflusst den Verlauf der extrapolierten Feldgröße in der Nähe der freien Oberfläche. Je größer der Wert der charakteristischen Länge ist, desto weiter ist die Feldgröße in das Gebiet jenseits der freien Oberfläche extrapoliert und desto mehr verringert sich der Betrag der extrapolierten Feldgröße in der Nähe der freien Oberfläche. Eine Näherungslösung für die extrapolierten Feldgrößen ist mit der Finite-Elemente-Methode bestimmt, so dass die charakteristische Länge in Abwägung ihrer Auswirkungen auf die Extrapolation einer Feldgröße nach Gleichung (3.74) mit der Geometrie der Elemente festgelegt ist. Mit der Berechnung extrapolierte Feldgrößen ist das Lösungsschema der *FFEM* in Abbildung 6.14 dargestellt. Es zeigt, dass für eine gute Konvergenz innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens der Lösungsschritt für die Generierung gültiger Startwerte auch eine Extrapolation der Geschwindigkeiten beinhaltet. Mit dem Ziel einer guten Konditionierung sind in Analogie zu der *XFEM* auch die Systemmatrizen von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen innerhalb der *FFEM* auf Grundlage des Kriteriums nach Ungleichung (6.4) modifiziert.

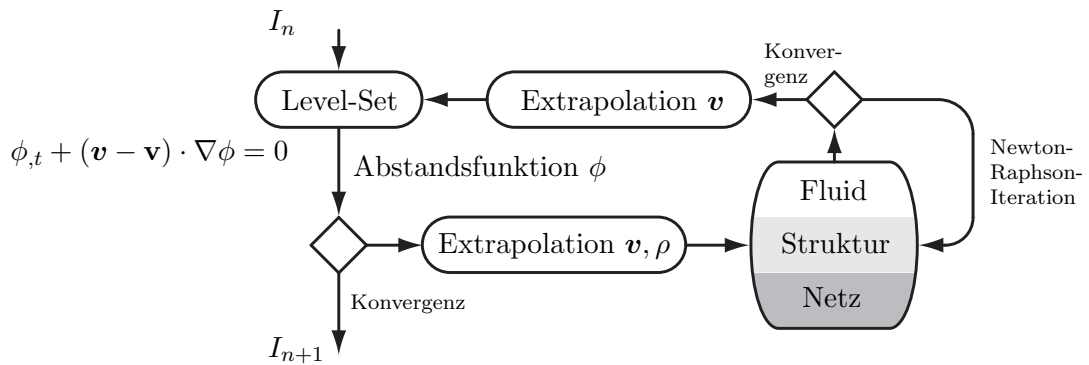


Abbildung 6.14: Fixpunktiteration für Ein-Fluid-Strömungen

Befüllung und Entleerung eines Tanks

Der Vorteil der *FFEM* gegenüber der *XFEM* und deren Eignung für die Berechnung einer Näherungslösung von Ein-Fluid-Strömungen wird im Bezug auf die numerische Analyse von Silos mit Befüllungen und Entleerungen eines Tanks diskutiert. Die Parameter des Modells sind in Abbildung 6.15a gegeben. Die Befüllung des Tanks mit unterschiedlich viskosen und inkompressiblen Flüssigkeiten ist mit einem kreisförmigen Schuss initiiert. Zu Beginn der Befüllung ist die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung am oberen Rand des nach oben offenen Tanks für die Dauer von $t = 1$ s gesperrt. Anschließend sind keine Randbedingungen am oberen Rand

gesetzt, so dass sich das Strömungsfeld im Tank frei entwickeln kann. Nach sieben Sekunden ist der Tank auf halber Breite entleert. Das Gebiet des Tanks ist unter Berücksichtigung der Symmetrie mit 40×120 Elementen mit linearer Approximation der Geschwindigkeiten diskretisiert. Die Zeitschrittweite ist zu Beginn der Berechnung mit $\Delta t = 0,0125 \text{ s}$ vorgegeben.

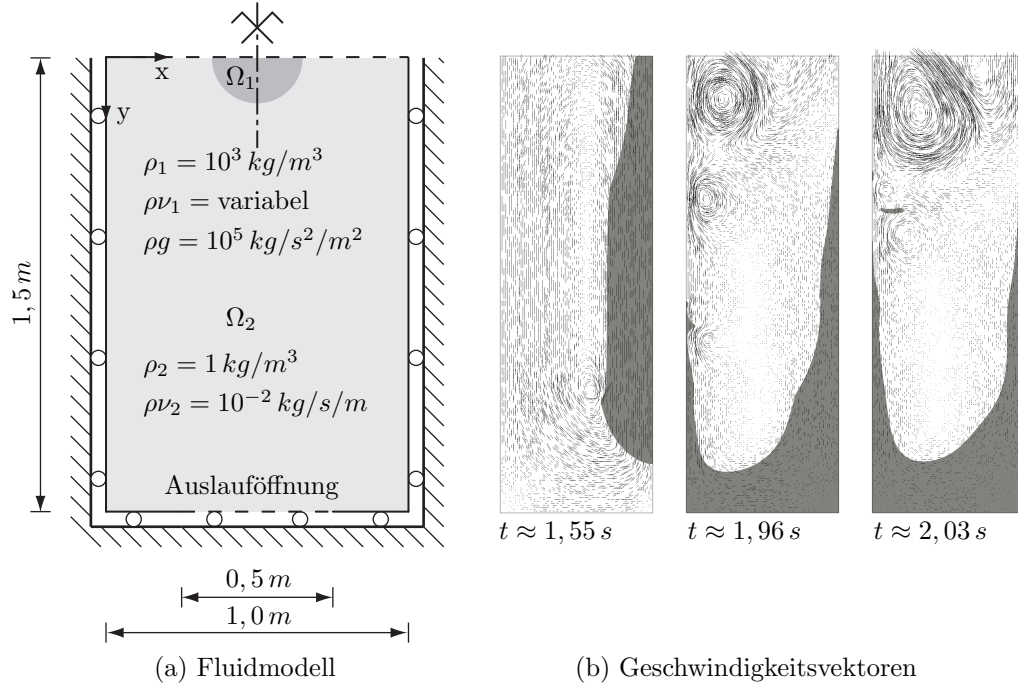
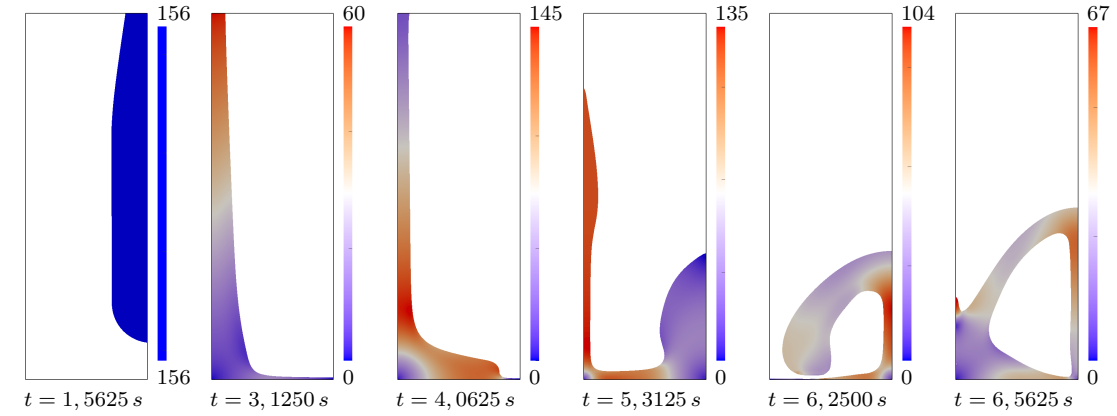
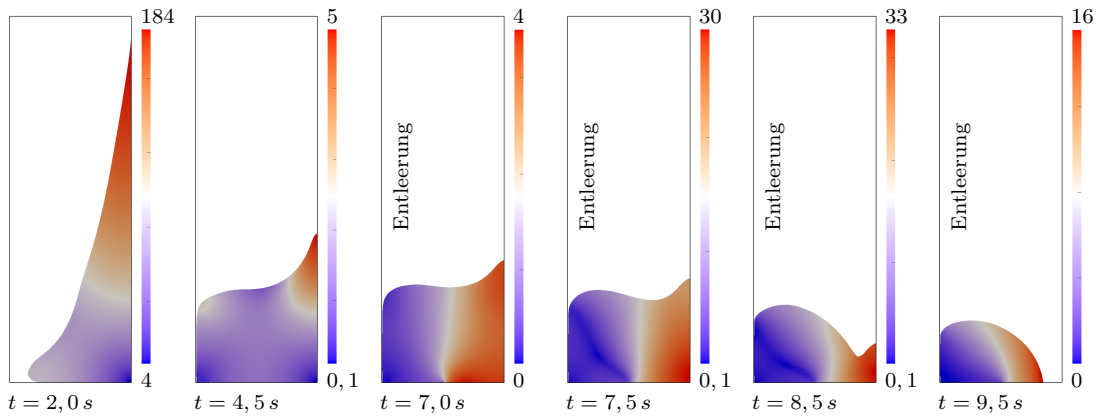


Abbildung 6.15: Befüllung und Entleerung eines Tanks

Die Entwicklung des Schusses mit einer Viskosität von $\rho\nu_1 = 2 \text{ kg/s/m}$ ist in Abbildung 6.15b dargestellt. Die freie Oberfläche wird mit dem Geschwindigkeitsfeld des Schusses und mit dem Geschwindigkeitsfeld des verdrängten Fluids bewegt. Die Deformation der anfänglich kreisförmigen Schussfront und die nichtlineare Verjüngung des Schusses mit dem Ende der Befüllung zeigt den Einfluss des umgebenden Fluids auf die Bewegung der freien Oberfläche. Bei der Bewertung der Bewegung ist zu beachten, dass die Viskosität des umgebenden Fluids in etwa der 500-fachen Viskosität von Luft entspricht. Mit der Ausbildung von Wirbeln im niederviskosen Fluid verringert sich die Zeitschrittweite deutlich, so dass die Berechnung der Befüllung und Entleerung des Tanks mit einem Zwei-Fluid-Modell in angemessener Zeit nicht möglich ist. Die mit Ein-Fluid-Modellen bestimmten Bewegungen der freien Oberflächen sind für zwei Schüsse mit einer Viskosität von $\rho\nu_1 = 2 \text{ kg/s/m}$ oder $\rho\nu_1 = 200 \text{ kg/s/m}$ in Abbildung 6.16 dargestellt. Die Berechnung der Bewegung des niederviskosen Fluids ist mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,0125 \text{ s}$ initiiert. Indessen ist die langsamere Bewegung des höherviskosen Fluids mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,025 \text{ s}$ berechnet. In beiden Fällen sind alle Zeitscheiben mit derselben Zeitschrittweite ausgewertet, so dass die Befüllungen und Entleerungen zeiteffizient berechnet sind.



(a) Dynamische Viskosität $\rho\nu_1 = 2 \text{ kg/s/m}$



(b) Dynamische Viskosität $\rho\nu_1 = 200 \text{ kg/s/m}$

Abbildung 6.16: Geschwindigkeitsfelder $\|\mathbf{v}\|$ in 10^{-2} m/s

Der Vergleich der in den Abbildungen 6.15b und 6.16a dargestellten Gebiete des zwischengelagerten Fluids zum Zeitpunkt $t \approx 1,55 \text{ s}$ lässt erkennen, dass im Grenzfall $\rho\nu_2 \rightarrow 0$ die Form der Schussfront bis zum Boden des Tanks erhalten ist. Die Verjüngung des Schusses ab dem Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ ist von der Komponente \tilde{v}_x des extrapolierten Geschwindigkeitsfeldes eingeleitet, die entlang des fortan freien Randes nicht mehr zu Null gesetzt ist. Mit dem Nachlauf der Flüssigkeit ist für den Zeitpunkt $t = 5,3125 \text{ s}$ in Abbildung 6.16a gezeigt, dass infolge der nicht definierten Randbedingung für eine Näherungslösung der Abstandsfunktion Flüssigkeit in unbestimmter Menge in das Gebiet des Tanks bewegt ist. Des Weiteren ist das von der Flüssigkeit eingeschlossene Volumen in der Zeit nicht erhalten. Aus diesem Grund ist die *FFEM* für eine numerische Analyse der Befüllung und Entleerung eines Tanks mit Flüssigkeiten der Viskosität $\rho\nu_1 = 2 \text{ kg/s/m}$ nicht geeignet. Im Gegensatz zu dem niederviskoserem Fluid überschlägt sich das höherviskosere Fluid nicht, so dass dessen Bewegung in guter Näherung berechnet werden kann. Das sich die freie Oberfläche überschlägt, ist während der Entleerung von Silos nicht zu erwarten, so dass mit der *FFEM* eine geeignete Methode zu deren numerischer Analyse bereitgestellt ist.

7 Validierung und Verifikation

Im folgenden Kapitel qualifizieren Benchmarks der Struktur- und Fluidmechanik, sowie der Fluid-Struktur-Wechselwirkung das entwickelte Finite-Elemente-Programm für die numerische Analyse von Silos.

7.1 Strukturmechanik

Cook-Scheibe

Der Flexibilitätstensor eines Neo-Hooke-Materials mit elastischem Potential nach Gleichung (3.87) wird mit der Cook-Scheibe validiert. Die dazugehörigen Modellparameter sind in Abbildung 7.1 dargestellt. Neben dem Flexibilitätstensor ist auch die Implementierung der Elementroutine für gemischt-hybride Elemente mit der Konvergenz der Lösungsvektoren innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens verifiziert.

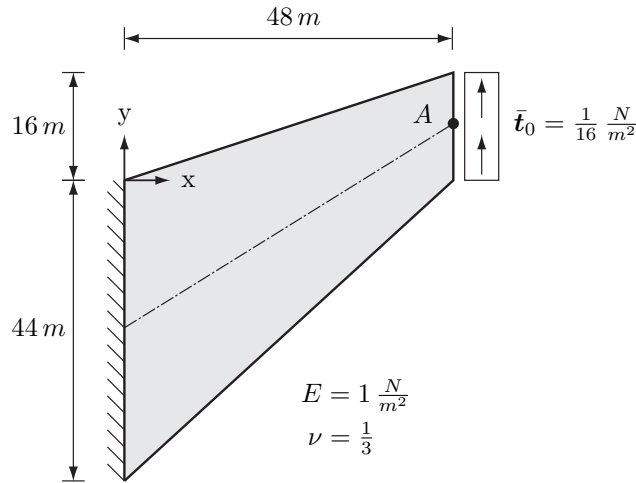


Abbildung 7.1: Cook-Scheibe

Der Verformungszustand infolge der Randspannung ist für Lagerungsbedingungen des ebenen Verzerrungszustandes alternativ mit Elementen für eine gemischte Formulierung und eine Weggrößenformulierung der Arbeitsgleichung berechnet. Neben der gemischten Formulierung nach (3.26) ist die Arbeitsgleichung in Weggrößenformulierung mit

$$\int_{\Omega_0, n} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0^N} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, d\Gamma_0^N = 0, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{S} = \mu_L (\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda_L \ln(J) \mathbf{C}^{-1}, \quad J^2 = I_3(\mathbf{C}) \quad \text{und}$$

$$\delta \mathbf{E} = \text{sym}(\mathbf{F}^T \nabla_0 \delta \mathbf{u})$$

in Abhängigkeit der Verschiebungen als Beschreibungsvariablen gegeben. Mit den Verschiebungen als Beschreibungsvariablen sind die Näherungslösungen zeitunabhängig. Im Gegensatz dazu ist für eine Näherungslösung nach der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode die Randspannung in Zeitschritten und innerhalb einer Sekunde linear gesteigert. Für einen Vergleich der Näherungslösungen sind die jeweiligen Weggrößen der verschiedenen Formulierungen mit quadratischen Lagrange-Ansätzen nach Gleichung (3.46) in den Elementen beschrieben, mit denen auch die Spannungen in gemischt-hybriden Elementen angenähert sind (siehe Kapitel 3.2.1.2).

Die Konvergenz der Näherungslösungen wird mit der Verschiebung des materiellen Punktes A untersucht (siehe Abbildung 7.1). Damit ist ein Punkt gewählt, der fernab der singulären Stelle in der stumpfen Ecke der Einspannung liegt (vergleiche BRINK [9]). Die Singularität im Lösungsverlauf lässt unter anderem die Normalspannung S_{xx} bei einer Verfeinerung des Finite-Elemente-Netzes gegen Unendlich streben. Des Weiteren beeinflusst sie deutlich die Verzerrung des Elementes, das die Form der stumpfwinkligen Ecke beschreibt. Der in Abbildung 7.2 dargestellte Verformungszustand ist mit 32×32 gemischt-hybriden Elementen und mit 16 Zeitschritten berechnet. Er zeigt die Verschiebung des Punktes A und die Verzerrungen der Elemente. In Übereinstimmung mit der Verzerrung des Elementes in der stumpfwinkligen Ecke, ist mit den gemischt-hybriden Elementen auch die Singularität im Verlauf der Normalspannung S_{xx} abgebildet (siehe Abbildung 7.3). Erst wenn die Skala derart modifiziert wird, dass sich der Farbverlauf ab einem Wert von $S_{xx} = -0.4 \text{ N/m}^2$ entwickelt, lassen sich die Bereiche mit Druck- und Zugnormalspannungen zuordnen.

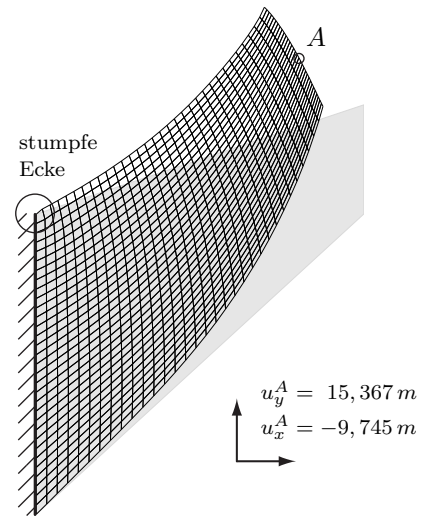


Abbildung 7.2: Verformung

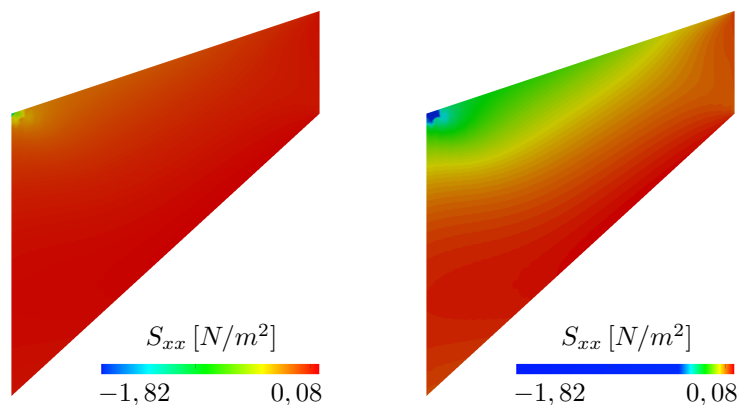


Abbildung 7.3: Verlauf der Normalspannung S_{xx}

Die Konvergenz der Lösungsvektoren der nichtlinearen Gleichungssysteme ist mit den Werten der L2-Normen für deren Zuwüchse gegeben (siehe Tabelle 7.1). Während

der Konvergenzradius in der ersten Zeitscheibe erst ab dem vierten Iterationsschritt erreicht ist, konvergiert der Lösungsvektor für das Gleichungssystem der letzten Zeitscheibe nach drei Iterationsschritten quadratisch gegen die exakte Lösung. Die Konvergenz zeigt, dass auch Neo-Hooke-Materialien, deren Spannungszustand nichtlinear vom Deformationsgradienten abhängt, mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode effizient berechnet werden können.

Iterations- schritt	$\ \Delta \hat{\mathbf{v}}\ $ in m/s	
	$0 s \leq t \leq 0,0625 s$	$0,9375 s \leq t \leq 1 s$
1	$1,701 \cdot 10^{+3}$	$3,365 \cdot 10^{+1}$
2	$3,302 \cdot 10^{+1}$	$8,318 \cdot 10^{-1}$
3	$7,521 \cdot 10^{-2}$	$1,631 \cdot 10^{-5}$
4	$2,303 \cdot 10^{-7}$	$4,299 \cdot 10^{-11}$

Tabelle 7.1: Konvergenz zweier Lösungsvektoren

Die Konvergenz der Näherungslösung wird mit der Verschiebungskomponente u_y^A zunächst für die Arbeitsgleichung in Weggrößenformulierung untersucht. Dazu ist das Finite-Elemente-Netz sukzessive verfeinert (siehe Abbildung 7.4a). Die stetig monotone Konvergenz zeigt, dass mit 32×32 Elementen eine gute Näherungslösung für die Verschiebung des materiellen Punktes A berechnet ist.

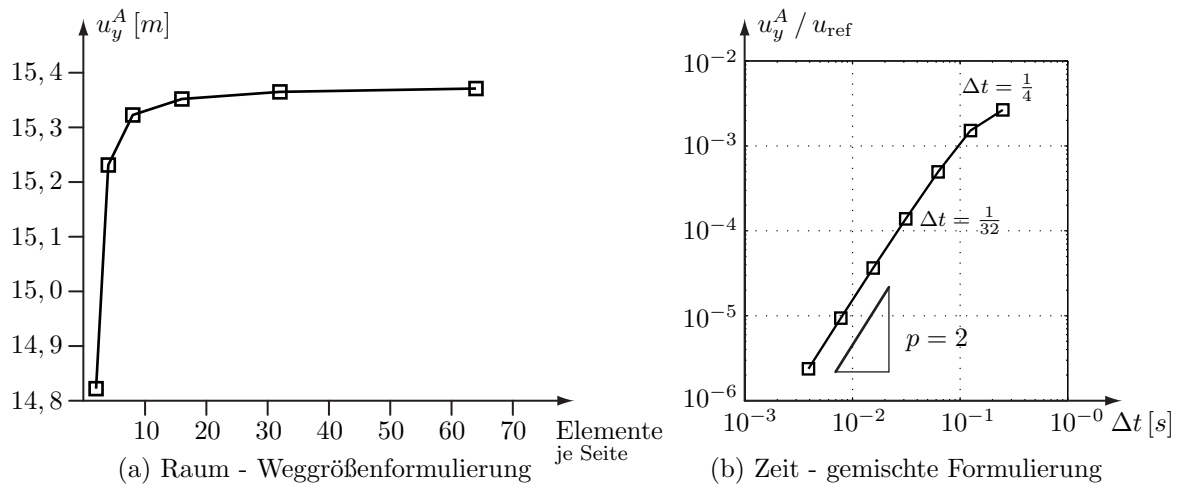


Abbildung 7.4: Konvergenz der Näherungslösung

Im Folgenden wird für gemischt-hybride Elemente mit Geschwindigkeiten als primäre Beschreibungsvariablen die Konvergenz der Näherungslösung in der Zeit analysiert. Dazu ist der Referenzwert mit der zuvor bestimmten Näherungslösung für 8×8 Elemente festgelegt. Es sind Näherungslösungen für eine gleiche Anzahl an Elementen in Abhängigkeit der Zeitschrittweite berechnet. Die Entwicklung des in Abbildung 7.4b dargestellten Fehlers zeigt, dass die Näherungslösung quadratisch gegen die Referenzlösung konvergiert.

Streifenfundament

Die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung für Strukturen mit elastisch-viskoplastischem Materialverhalten ist mit dem Spannungszustand im Halbraum unterhalb eines Streifenfundamentes validiert. Die Setzung des Streifenfundamentes ist dem Modell des Halbraumes vorgegeben, das in Abbildung 7.5a dargestellt ist.

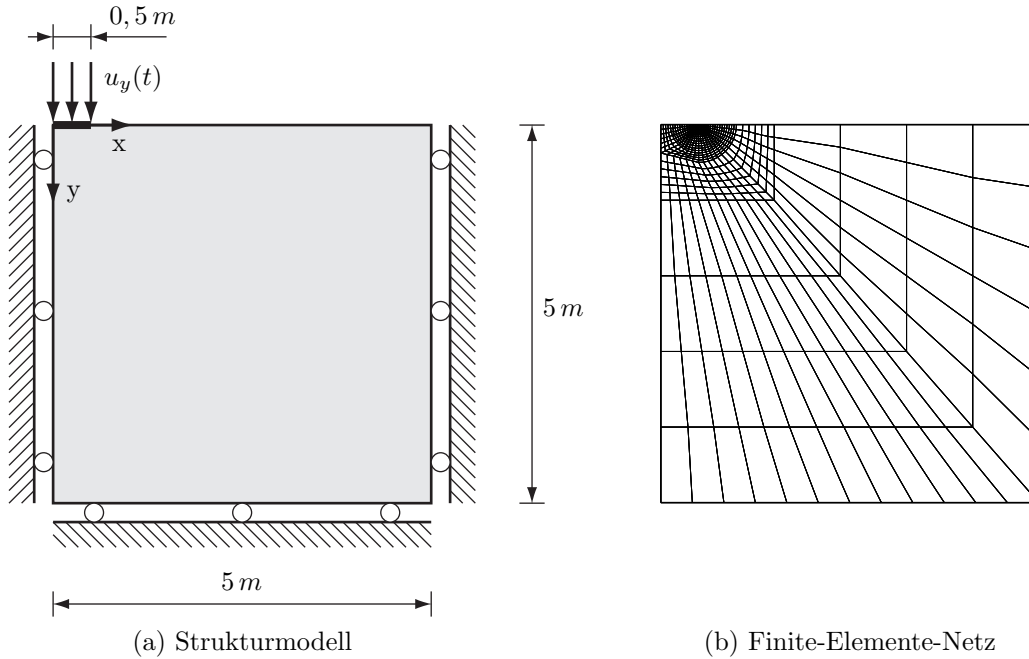


Abbildung 7.5: Streifenfundament

Der Boden ist in Bezug auf eine analytische Lösung für den Druck in der Kontaktfläche unterhalb des Streifenfundamentes als Struktur mit elastisch-viskoplastischem Materialverhalten für von-Mises-Plastizität beschrieben. Die Flexibilität ist mit dem Elastizitätsmodul $E = 10^{10} \text{ N/m}^2$ und der Querdehnzahl $\nu = 0,48$ für nahezu inkompressibles Materialverhalten festgelegt. Plastische Verformungen bilden sich ab einer Fließspannung von $\sigma_y = 49\sqrt{3} \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ mit einer Geschwindigkeit aus, die von der Viskosität $d = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Ns/m}^2$ beeinflusst ist. Der Spannungszustand ist mit 540 Elementen für eine lineare Approximation der Geschwindigkeiten und mit dem Finite-Elemente-Netz berechnet, dass in Abbildung 7.5b dargestellt ist. Es ist im Bereich des Streifenfundamentes derart verdichtet, dass der Spannungszustand mit nahezu würfelförmigen Elementen am Übergang zum freien Rand optimal angenähert wird. Sowohl das Finite-Elemente-Netz als auch die Fließspannung nebst Elastizitätsmodul und Querdehnzahl entsprechen dem von NETO [46] verwendeten Modell. Die maximale Verschiebung mit einem Wert von $u_y^{\max} = 0,002 \text{ m}$ ist mit dem in Abbildung 7.6a dargestellten Verlauf der Geschwindigkeit in 14 Zeitschritten und innerhalb von 14 Sekunden vorgegeben.

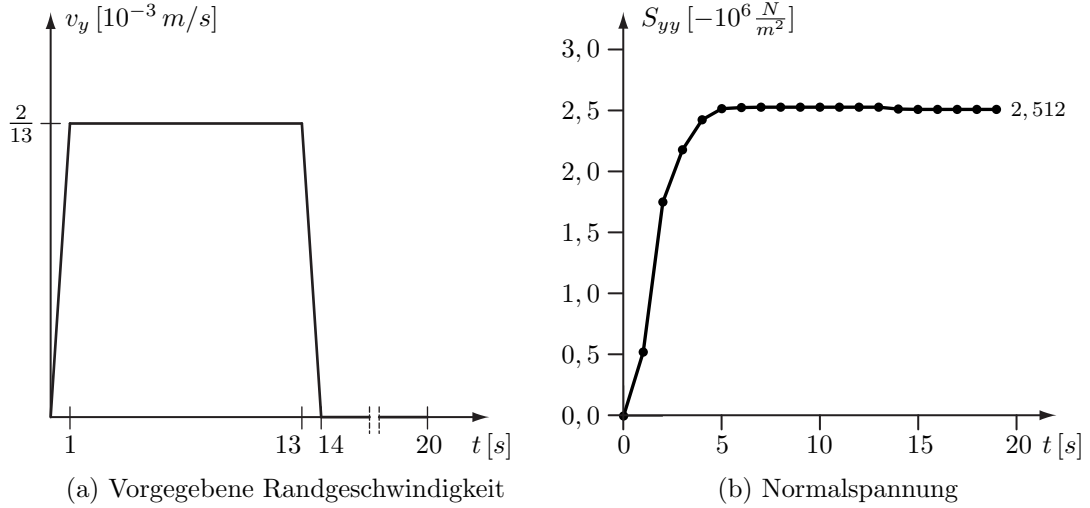


Abbildung 7.6: Verlauf von Zustandsgrößen im Zeitbereich

Die Näherungslösung ist mit der Normalspannung S_{yy} in der Symmetrieebene und unterhalb des Streifenfundamentes an der Stelle $x = 0\text{ m}$ und $y = 0\text{ m}$ im Zeitverlauf ausgewertet (siehe Abbildung 7.6b). Deren geringe Relaxation innerhalb des Zeitintervalls $14\text{ s} \leq t \leq 15\text{ s}$ verdeutlicht, dass sich das Material nahezu elastisch-idealplastisch verformt. Der Wert der Normalspannung zum Zeitpunkt $t = 20\text{ s}$ validiert im Vergleich mit der von PRANDTL und HILL [30] auf Grundlage der *slip-line-theory* hergeleiteten analytischen Lösung

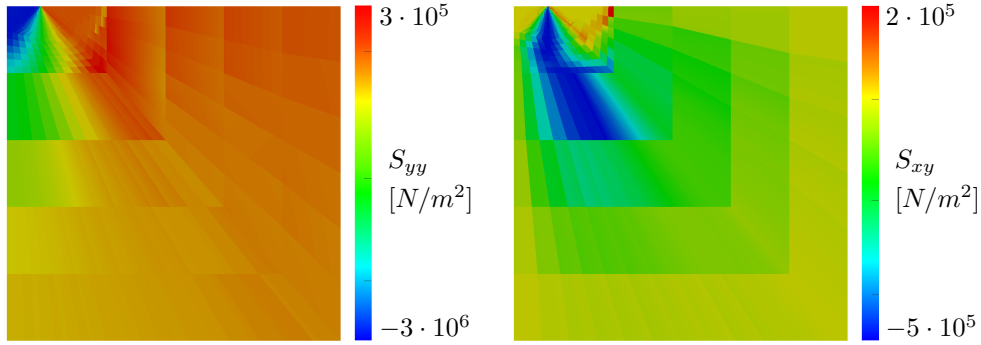
$$p_{\max} = (2 + \pi) \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \approx 2,521 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2, \quad (7.2)$$

die verwendete Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung. Während der Druck unterhalb des Fundamentes bereits mit 540 Elementen nahezu exakt abgebildet wird, zeigen die in Abbildung 7.7a dargestellten Spannungsverläufe deutlich, dass das Gebiet für eine Interpretation der Näherungslösung noch nicht fein genug elementiert ist. Aus diesem Grund ist eine weitere Näherungslösung mit einem feineren Finite-Elemente-Netz berechnet. Die dazugehörigen Verläufe der Normalspannung S_{xx} und der Schubspannung S_{xy} sind in Abbildung 7.7b dargestellt. Neben einer Druckzwiebel ist eine Scherfuge zu erkennen, entlang der die separierten Bereiche des Bodes gegeneinander abgleiten.

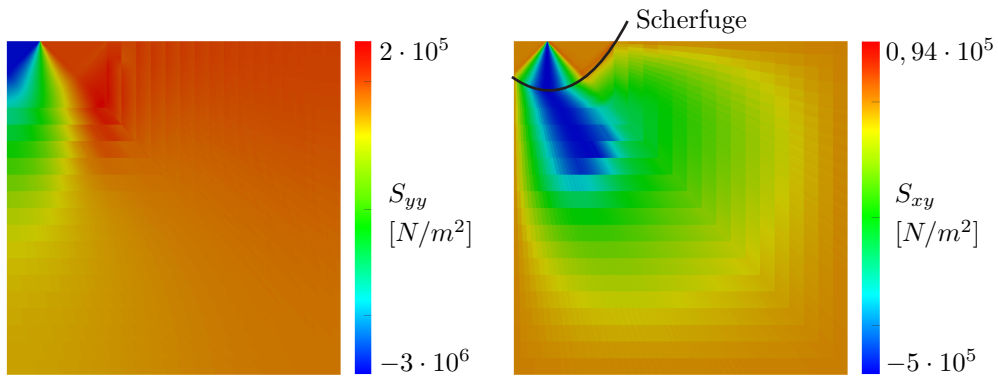
7.2 Fluidmechanik

Zylinderumströmung

Die Elementroutine, mit der die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung inkompressibler newtonscher Fluide umgesetzt ist, ist mit der Zylinderumströmung nach TUREK [63] verifiziert.



(a) 540 Elemente



(b) 8.640 Elemente

Abbildung 7.7: Spannungszustand im Halbraum

Mit der Zylinderumströmung sind weiterhin die Einflüsse der Stabilisierung und der Ansätze für die Geschwindigkeiten auf die Näherungslösung untersucht. Sie ist mit der Interaktionskraft bewertet, die auf den Zylinder im Strömungskanal wirkt, der mit seinen Abmessungen in Abbildung 7.8 dargestellt ist.

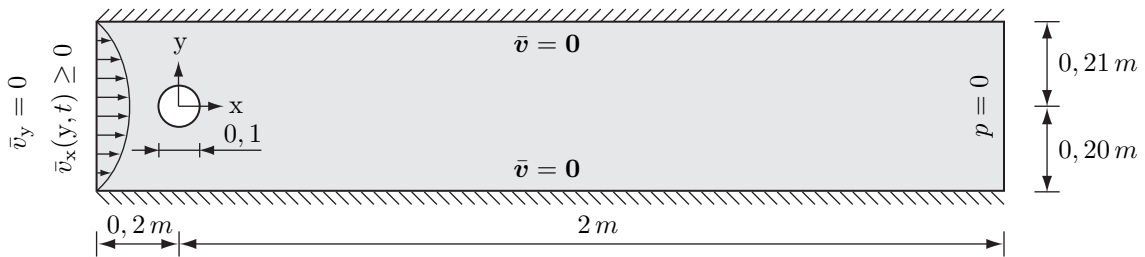


Abbildung 7.8: Zylinderumströmung

Die Strömung ist mit der Randgeschwindigkeit

$$\bar{v}_x(y, t) = \begin{cases} \bar{v}_x(y) \frac{1}{2} (1 - \cos(a \frac{t}{1s})) & \text{für } t < t_1 \\ \bar{v}_x(y) & \text{für } t \geq t_1 \end{cases} \quad (7.3)$$

in Abhängigkeit des räumlichen Verlaufs

$$\bar{v}_x(y) = \bar{v}_x^{\max} \frac{4}{0,1681} \left(\frac{21}{500} + \frac{1}{100m} y - \frac{1}{m^2} y^2 \right) \quad (7.4)$$

initiiert, dessen Werte an den Knoten von Finite-Elemente-Netzen mit den Parametern $a = \pi$, $t_1 = 1 \text{ s}$ und $\bar{v}_x^{\max} = 1,5 \text{ m/s}$ in Zahlen bestimmt sind. Die Randgeschwindigkeit setzt das Fluid mit einer dynamischen Viskosität von $\rho\nu = 10^{-3} \text{ N s/m}^2$ und einer Dichte von $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ derart in Bewegung, dass sich eine quasi-stationäre Lösung ab dem Zeitpunkt $t \approx 6 \text{ s}$ einstellt. Die Besonderheit des Benchmarks liegt in der Umströmung eines Zylinders. Im Gegensatz zu der Umströmung eines Rechtecks sind bei einem Zylinder die Stellen, an denen sich Wirbel ablösen, nicht vorgegeben. Die zeitveränderliche Lage der Umschlagpunkte des Druckes entlang der Oberfläche des Zylinders ist vielmehr von der Auflösung der Grenzschicht beeinflusst. Mit dem Ziel die Grenzschicht bei einer gegebenen Anzahl an Freiwerten gut aufzulösen sind die in Abbildung 7.9 dargestellten Finite-Elemente-Netze im Bereich des Zylinders verdichtet. Während die Anzahl von 15.490 Finite-Element-Knoten beider Netze identisch ist, ist das Fluidgebiet in Abbildung 7.9a für eine lineare Approximation der Geschwindigkeiten mit Q4-Elementen in beide Richtungen gegenüber dem größeren Netz in Abbildung 7.9b entsprechend verfeinert. Unabhängig von der Stabilisierung und Diskretisierung der Finite-Element-Formulierung ist der Verlauf der Interaktionskraft stets mit einer konstanten Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ berechnet.

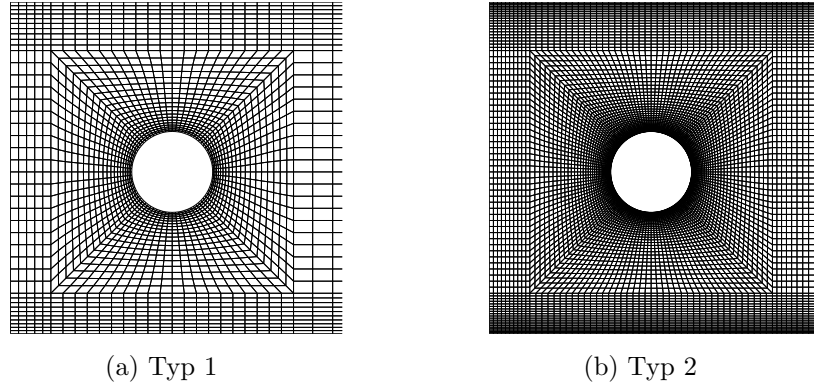


Abbildung 7.9: Finite-Elemente-Netze im Bereich des Zylinders

Die außermittige Anordnung des Zylinders und die begrenzte Rechengenauigkeit führt im Zeitverlauf auf eine Wirbelablösung und das in Abbildung 7.10 dargestellte Geschwindigkeitsfeld einer Kármánnischen Wirbelstraße.

Der Vektor der Interaktionskraft

$$F_x \mathbf{e}_1 + F_y \mathbf{e}_2 = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^F \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (7.5)$$

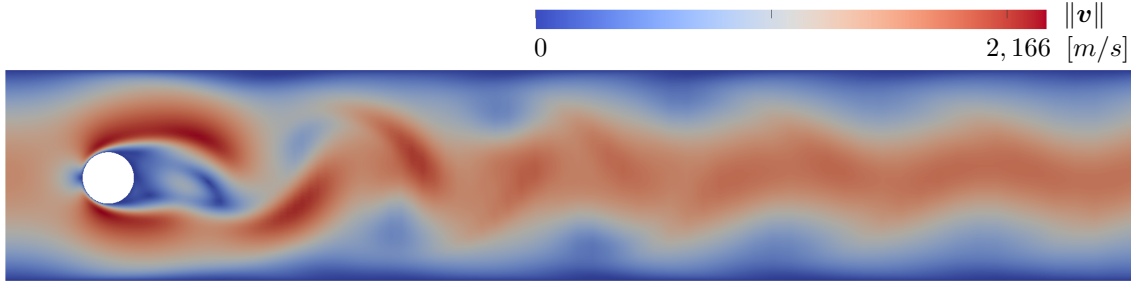


Abbildung 7.10: Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ s}$

ist mit dem Spannungsfeld des Fluids berechnet. Die Zeitverläufe seiner Komponenten sind in Abbildung 7.11 dargestellt. Sie sind mit Nummern entsprechend dem zugrunde liegenden Finite-Elemente-Netz und der verwendeten Diskretisierung und Stabilisierung zugeordnet (siehe Tabelle 7.2). Die Zeitverläufe sind mit der Periodendauer und dem Maximalwert im Zeitbereich $9,6 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$ bewertet, mit denen die Strouhal-Zahl

$$St = \frac{D}{v_\infty T} \quad (7.6)$$

und die Widerstandsbeiwerte

$$c_i = \frac{F_i}{q A} \quad \text{mit} \quad q A = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 D \quad (7.7)$$

in Abhängigkeit der mittleren Anströmgeschwindigkeit $v_\infty = \frac{2}{3} \bar{v}_x^{\max}$ bestimmt sind. Die Werte der Strouhal-Zahl und der Widerstandsbeiwerte sind in Tabelle 7.3 für ausgewählte Zeitverläufe den von Turek angegebenen Referenzwerten gegenübergestellt. Die Phasenverschiebung der jeweiligen Näherungslösung ist von untergeordneter Bedeutung und im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Der Vergleich der Näherungslösungen, die mit Elementen des Typs Q4 berechnet sind zeigt, dass bereits mit linearen Lagrange-Ansätzen für die Geschwindigkeiten die maximalen Werte des Widerstandsbeiwertes c_x in dem von Turek definierten Bereich liegen. Demgegenüber ist der maximale Wert des Widerstandsbeiwertes c_y besser angenähert, wenn die Finite-Element-Formulierung stabilisiert ist. Die Näherungslösungen, die mit Elementen des Typs Q9 berechnet sind, zeigen, dass das Strömungsfeld im Wesentlichen von der SUPG-Stabilisierung beeinflusst ist und eine zusätzliche Stabilisierung mit der Kontinuitätsgleichung im vorliegenden Fall nicht erforderlich ist. Es ist festzuhalten, dass die Referenzwerte mit quadratischen Lagrange-Ansätzen für die Geschwindigkeiten in den Elementen besser angenähert sind, wenn die Finite-Element-Formulierung nicht stabilisiert ist. Im Vergleich der Näherungslösungen, die mit Elementen des Typs Q4 oder Q9 bestimmt sind, wird der Einfluss der SUPG-Stabilisierung deutlich. Er ist bei einer quadratischen Approximation der Geschwindigkeiten stärker ausgeprägt. Der Vergleich der Zeitverläufe mit den Nummern sechs und sieben deutet darauf hin, dass alle Terme der Stabilisierung mit der Impulserhaltung nach Gleichung (3.75) im Finite-Elemente-Programm richtig umgesetzt sind.

	Element	Netz	Stabilisierung
1	Q4	2	PSPG
2			PSPG / SUPG / Kont.
3	Q9	1	-
4			SUPG
5			Kont.
6		2	SUPG / Kont.
7			

Tabelle 7.2: Legende

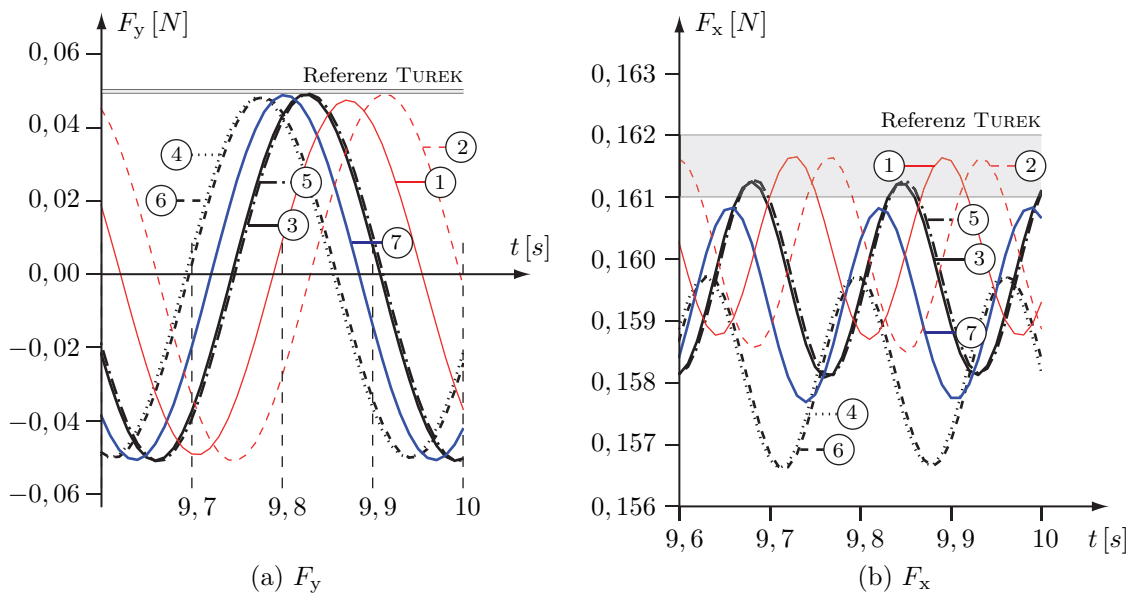


Abbildung 7.11: Interaktionskraft im Zeitbereich $9,6\text{ s} \leq t \leq 10\text{ s}$

Obwohl der Verlauf der Komponente F_y mit Elementen des Typs Q9 besser angenähert ist, wenn die Finite-Element-Formulierung nicht stabilisiert ist, kann abschließend nicht eindeutig festgestellt werden, ob das Strömungsfeld um den Zylinder mit quadratischen Lagrange-Ansätzen für die Geschwindigkeiten besser angenähert ist. Die Zeitverläufe und Strouhal-Zahlen verifizieren vielmehr die Implementierung der Elementroutinen newtonscher Fluide entsprechend den Gleichungen (3.65) und (3.77).

ohne Stabilisierung - nur PSPG bei Q4

		Elementtyp	
		Q4	Q9
Widerstandsbeiwerte	c_x	$3,2040 \pm 0,0300$	$3,1920 \pm 0,0320$
	c_y	$0,0160 \pm 0,9680$	$0,0190 \pm 1,0000$
Strouhal-Zahl	St	$0,3125$	$0,2940$

mit Stabilisierung - SUPG / Kont. / (PSPG bei Q4)

		Elementtyp	
		Q4	Q9
Widerstandsbeiwerte	c_x	$3,2020 \pm 0,0320$	$3,1640 \pm 0,0300$
	c_y	$0,0110 \pm 1,0000$	$0,0165 \pm 0,9860$
Strouhal-Zahl	St	$0,3125$	$0,3125$

Referenzwerte	$c_{x,max}$	untere Grenze	$3,220 - 3,240$	obere Grenze
	$c_{y,max}$		$0,990 - 1,010$	
	St		$0,295 - 0,305$	

Tabelle 7.3: Charakteristische Kennwerte

Extrusion

Die Abbildung viskoplastischer Strömungen ist mit der Extrusion eines inkompressiblen Bingham-Fluids gezeigt. Die Viskoplastizität ist mit der Fließspannung $\tau_y = 10^3 \text{ N/m}^2$ und dem Regularisierungsparameter $\epsilon = 0,0001 \text{ s}^{-1}$ beschrieben und charakterisiert zusammen mit der Dichte $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$ und der dynamischen Viskosität $\rho\nu = 10^{-6} \text{ Ns/m}^2$ das mechanische Verhalten des Fluids. Mit den Werten für die Regularisierung und die dynamische Viskosität schubverzerzt sich das Fluid nahezu starr plastisch. Sowohl die zuvor angegebenen Werte für die Modellparameter als auch die in Abbildung 7.12 dargestellte Form des Extrusionskanals entsprechen dem von PERIC [50] veröffentlichten Fluidmodell, das mit der Randspannung

$$\bar{t}_x(t) = \begin{cases} 360 \frac{\text{N}}{\text{s m}^2} t & \text{für } t < 10 \text{ s} \\ 3600 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} & \text{für } t \geq 10 \text{ s} \end{cases} \quad (7.8)$$

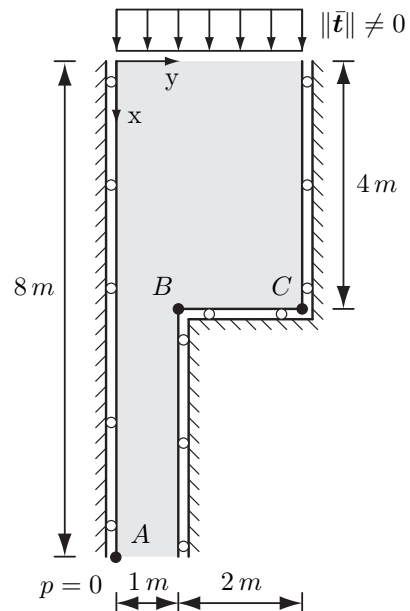


Abbildung 7.12: Modell

vervollständigt ist. Das Druckniveau ist mit $p = 0$ am Punkt A festgelegt und die Wandreibung für die Herleitung eines kritischen Extrusionsdrucks vernachlässigt. Der kritische Extrusionsdruck ist von LUBLINER [43] nach der *slip-line-theory* entwickelt und von Perić für die vorliegende Fließspannung mit einem Wert von $p = 3428 \text{ N/m}^2$ angegeben. Der Wert bestimmt die Intensität der Randspannung, ab der sich das Fluid für $\epsilon \rightarrow 0$ plastisch verformt. Das Fluidgebiet ist mit 14.400 quadratischen Elementen des Typs Q9 beschrieben und die Näherungslösung mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ bestimmt.

Die Entwicklung des plastischen Bereichs ist in Abbildung 7.13 dargestellt. Ausgehend vom Punkt B in der stumpfwinkligen Ecke der Querschnittsverjüngung entwickelt sich der plastische Bereich mit einem Winkel von 45° in Bezug auf die Wände des Kanals. Nachdem das Fluid auf der Breite des verjüngten Kanals infolge der Masseträgheit in kurzer Zeit plastifiziert ist, entwickelt sich die Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ über die Symmetrieebene bis hin zum Punkt C , so dass die Lage des plastischen Bereichs zum Zeitpunkt $t \approx 11 \text{ s}$ gegeben ist. Anschließend verbreitert sich der plastische Bereich bis auf das Abbildung 7.13c zu entnehmende Maß im quasi-stationären Zustand.

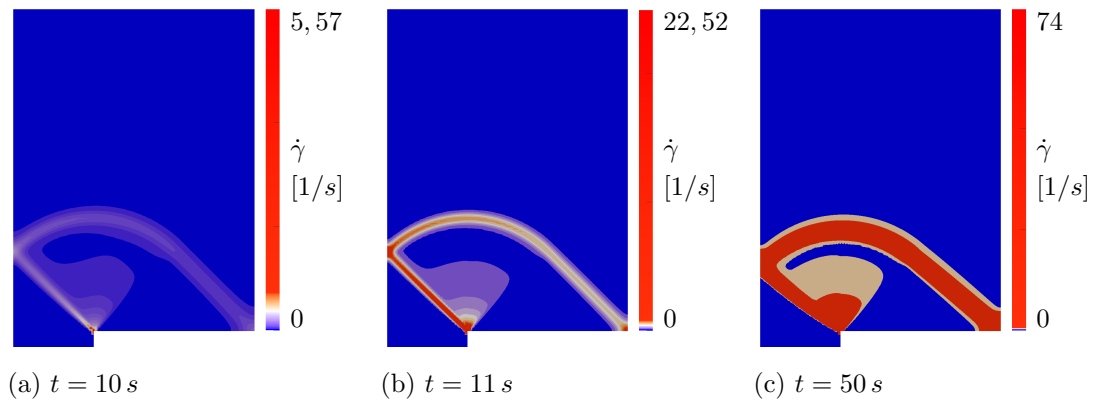


Abbildung 7.13: Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ zu diskreten Zeitpunkten

Mit einer Randspannung von $\bar{t}_x = 3600 \text{ N/m}^2$ sind die materiellen Punkte des Fluids innerhalb des plastischen Bereichs und den Strömungslinien in Abbildung 7.14b folgend umgelenkt. Die Strömungslinien sind mit dem Geschwindigkeitsfeld entwickelt, dessen Komponenten in Abbildung 7.14a dargestellt sind. Mit der lokal konzentrierten Umlenkung bewegt sich das Fluid außerhalb des plastischen Bereichs nahezu parallel zu den Wänden des Extrusionskanals. Dieses Strömungsverhalten unterscheidet sich deutlich von der laminaren Strömung eines newtonschen Fluids, dessen Strömungslinien sich über einen größeren Bereich Δx kontinuierlich verdichten, infolgedessen das Geschwindigkeitsfeld im Bereich des Punktes C signifikant verlangsamt ist.

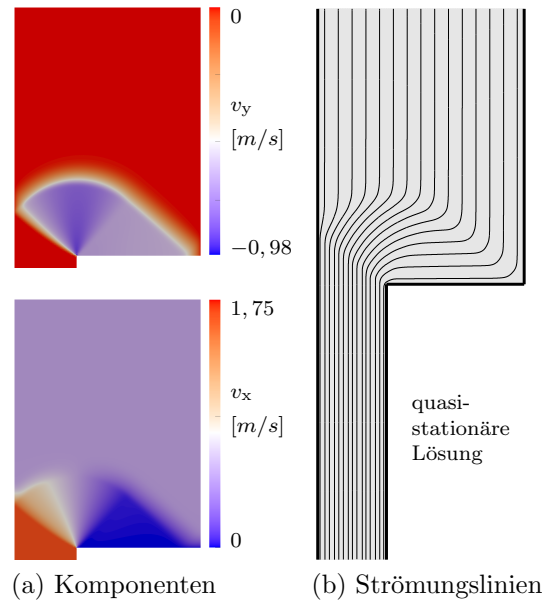


Abbildung 7.14: Geschwindigkeitsfeld

Die zeitliche Entwicklung des Strömungsfelds ist mit der Norm des Geschwindigkeitsvektors am Punkt A in Abbildung 7.15a dargestellt. Während die materiellen Punkte des Fluids vor Erreichen des kritischen Extrusionsdrucks nahezu in ihrer Position verharren, entwickelt sich die Geschwindigkeit im Zentrum der Extrusionsöffnung unter der Wirkung der Masseträgheit nichtlinear bis auf einen Wert von $\|\mathbf{v}\|^A \approx 1,65 \text{ m/s}$ im quasi-stationären Zustand. Der in Abbildung 7.15b im Auszug dargestellte Geschwindigkeitsverlauf zeigt deutlich, dass mit der Implementierung der Viskoplastizität das Strömungsverhalten von Bingham-Fluiden numerisch analysiert werden kann.

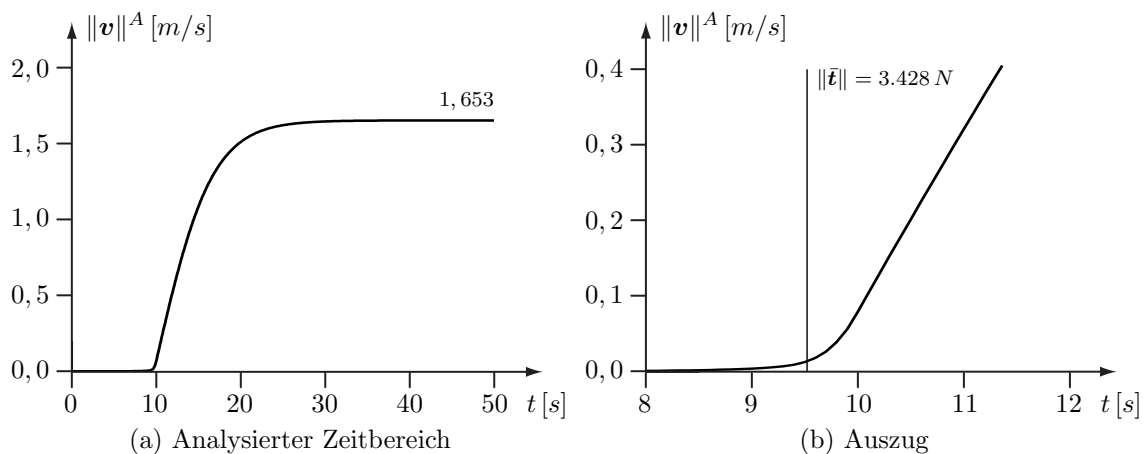


Abbildung 7.15: Geschwindigkeit im Zentrum der Extrusionsöffnung

7.3 Fluid-Struktur-Wechselwirkung

Wirbelerregte Platte - Modellbeschreibung

Die numerische Umsetzung der starken Kopplung zwischen Fluid und Struktur, einschließlich der Netzbewegung im Fluid, ist mit dem in Abbildung 7.16 dargestellten Benchmark nach HRON und TUREK [32] untersucht.

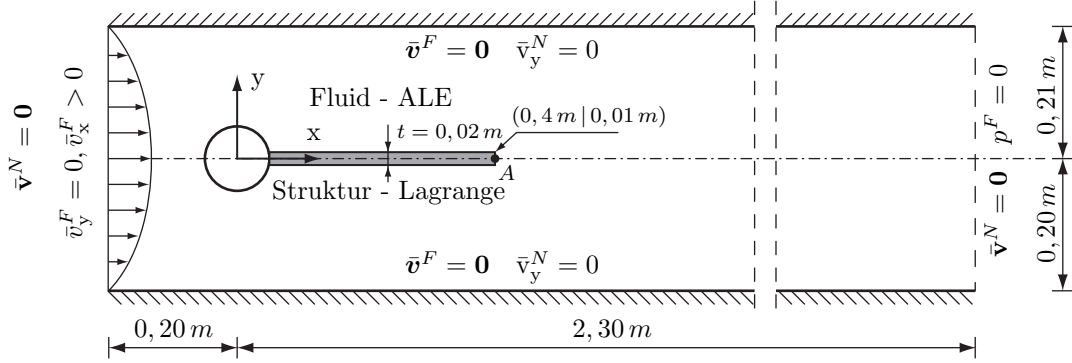


Abbildung 7.16: Wirbelerregte Platte hinter rundem Starrkörper

Der Benchmark modelliert eine flexible Platte hinter einem runden Starrkörper, die in einem Strömungskanal wirbelinduziert in Bewegung ist. Das Verformungsverhalten der elastischen Struktur ist mit den Materialparametern

$$E = 5,6 \cdot 10^6 \text{ kg/m/s}^2, \quad \nu = 0,4 \quad \text{und} \quad \rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

eines Elastomers und den Modellgleichungen für große Rotationen bei kleinen Verzerrungen beschrieben. Sie ist mit einer Länge von $l = 0,35 \text{ m}$ und einer Höhe von $h = 0,02 \text{ m}$ relativ schlank, so dass deren Verformungsverhalten von Biegeverformungen dominiert ist. Mit einem zylindrischen Starrkörper des Radius $r = 0,05 \text{ m}$ bewegt sich die Platte mit den Modellparametern des FSI3-Benchmarks stets in dessen horizontaler Projektion. Das mechanische Verhalten des newtonschen Fluids ist mit den Materialparametern

$$\mu_L = 1 \text{ kg/m/s} \quad \text{und} \quad \rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

von Glycerin und den Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen beschrieben. Die wirbelinduzierte Schwingung der Platte ist im ebenen Verzerrungszustand für eine Randgeschwindigkeit numerisch analysiert, deren Verlauf im Raum und in der Zeit mit den Gleichungen (7.3) und (7.4) beschrieben und mit den Parametern $a = \pi/2$, $t_1 = 2 \text{ s}$ und $v_x^{\max} = 3 \text{ m/s}$ in Zahlen bestimmt ist. Zunächst sind die Schwingung der Platte infolge Volumenlast und die Interaktionskraft zwischen Fluid und Struktur bei starrer Platte getrennt voneinander berechnet und diskutiert. Auf Grundlage der Näherungslösungen für die Bewegungen der Struktur und des Fluids sind anschließend die Interaktionskraft der Fluid-Struktur-Wechselwirkung und die

wirbelerregte Schwingung der Platte numerisch analysiert. Die Verifizierung des Finite-Elemente-Programms erfolgt mit charakteristischen Werten der Näherungslösungen.

Erzwungene Schwingung

Abweichend von der flexiblen Platte des gekoppelten Systems definiert Turek Referenzwerte für eine erzwungene Schwingung einer Platte, deren Materialverhalten bei gleicher Querdehnzahl mit einem Elastizitätsmodul von $E = 1,4 \cdot 10^6 \text{ kg/m/s}^2$ beschrieben ist. Mit dem Ziel die Implementierung der Routine von Strukturelementen in Bezug auf geometrisch nichtlineares Verformungsverhalten zu verifizieren, sind zunächst Näherungslösungen für die periodische Bewegung der Platte infolge einer konstanten Volumenlast mit einem Wert von $\rho_0 g_2 = 2000 \text{ kg/m}^2/\text{s}^2$ berechnet (siehe Abbildung 7.17a). Die Bewegung ist für den materiellen Punkt A und die Anfangsbedingungen $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ in den Abbildungen 7.17b und 7.17c dargestellt.

Näherungslösungen sind auf Grundlage der nicht stabilisierten Arbeitsgleichung (3.26) mit Elementen berechnet, in denen die Verläufe der Geschwindigkeiten und Spannungen im Raum mit biquadratischen Ansätzen beschrieben sind. Die Zeitverläufe der Komponenten der Verschiebung sind mit deren Mittelwerten und Amplituden charakterisiert. Sie sind nach Turek mit

$$u_{i,\text{Mittelwert}} = \frac{1}{2}(u_{i,\text{max}} + u_{i,\text{min}}) \quad \text{und} \quad u_{i,\text{Amplitude}} = \frac{1}{2}(u_{i,\text{max}} - u_{i,\text{min}})$$

bestimmt und in Abhängigkeit der Zeitschrittweite und der Anzahl an Elementen in Tabelle 7.4 zusammengestellt.

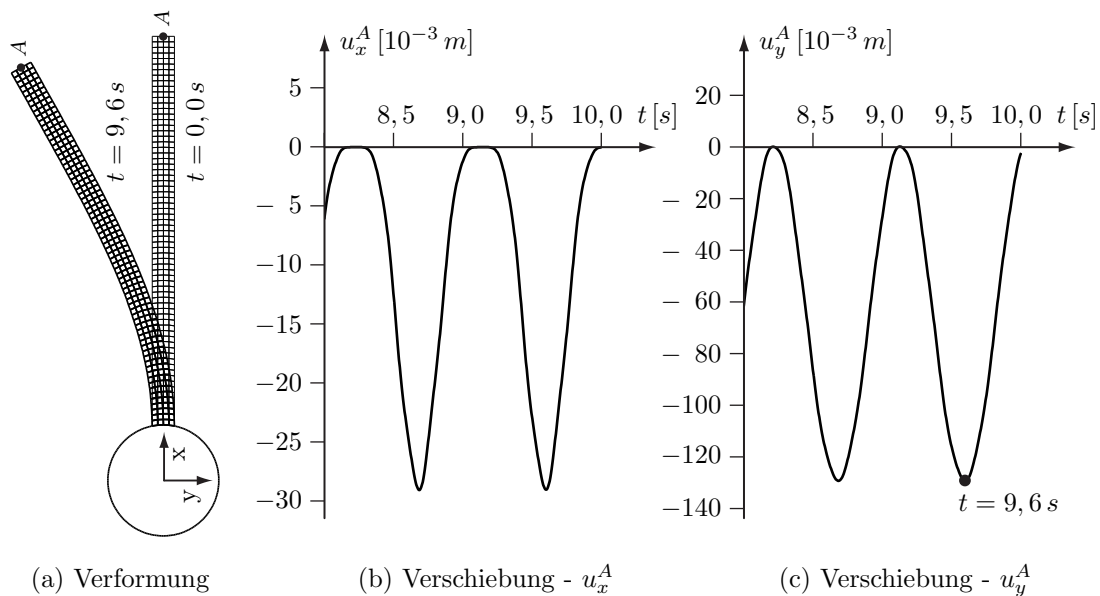


Abbildung 7.17: Erzwungene Schwingung

Der Vergleich der Werte zeigt, dass die Güte einer Näherungslösung im Wesentlichen von der Zeitschrittweite bestimmt ist. Dies ist mit dem Verformungsverhalten von quadratischen Elementen des Typs Q9 begründet, das nicht vom Phänomen des Schublockings beeinflusst ist (siehe Kapitel 3.2.1.3). Konvergieren die Mittelwerte der Komponenten der Verschiebung auch nicht exakt gegen die Referenzwerte nach Turek, sind deren Abweichungen bei einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,005 \text{ s}$ und 280×16 Elementen mit einem Wert kleiner 2% relativ gering. Nahezu exakt ist in diesem Fall die Grundfrequenz abgebildet, deren Wert nur um 0,5‰ gegenüber dem Referenzwert abweicht.

Δt in s	\sum Elemente	u_x^A in mm	u_y^A in mm	f_1 in s^{-1}
0,020	70×4	$-14,216 \pm 14,234$	$-64,507 \pm 64,024$	1,1364
0,020	140×8	$-14,250 \pm 14,267$	$-64,467 \pm 64,222$	1,1364
0,020	280×16	$-14,259 \pm 14,276$	$-64,455 \pm 64,273$	1,1364
0,010	280×16	$-14,495 \pm 14,500$	$-64,697 \pm 64,610$	1,1111
0,005	280×16	$-14,589 \pm 14,589$	$-64,818 \pm 64,705$	1,0989
Referenz - CSM3 [76]		$-14,305 \pm 14,305$	$-63,607 \pm 65,160$	1,0995

Tabelle 7.4: Charakteristische Werte der Näherungslösungen

In Bezug auf die wirbelerregte Schwingung der flexiblen Platte mit nichtlinearem Verformungsverhalten ist im Folgenden untersucht, wie gut deren Grundschiwingung mit den Eigenfrequenzen und Eigenformen eines Bernoulli-Balkens abgebildet werden kann. Im Vergleich mit dem Strukturmodell der flexiblen Platte sind mit einem Bernoulli-Balken auch die Einflüsse der Membrantragwirkung und der Querdehnung vernachlässigt. Die Eigenfrequenzen und Eigenformen von Bernoulli-Balken sind von PETERSEN [49] zusammengestellt. Die mit den Eigenfrequenzen

$$f_1 \approx \frac{0,5595}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{und} \quad f_2 \approx \frac{3,5069}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{für} \quad I = \frac{h^3}{12} \quad (7.9)$$

bestimmten Verläufe der Eigenformen q_1 und q_2 sind in Abbildung 7.18 dargestellt. Weicht auch die erste Eigenform ihrem Verlauf nach von dem Verformungszustand in Abbildung 7.17a ab, so ist die dazugehörige Eigenfrequenz mit einem Wert von $f_1 \approx 0,987 \text{ s}^{-1}$ der Grundfrequenz der erzwungenen Schwingung mit einem Referenzwert von $f \approx 1,0995 \text{ s}^{-1}$ nahezu identisch. Damit sind die niedrigen Frequenzen der wirbelerregten Schwingung der flexiblen Platte des FSI3-Benchmarks in erster Näherung gut mit den freien Schwingungen eines äquivalenten Bernoulli-Balkens verglichen.

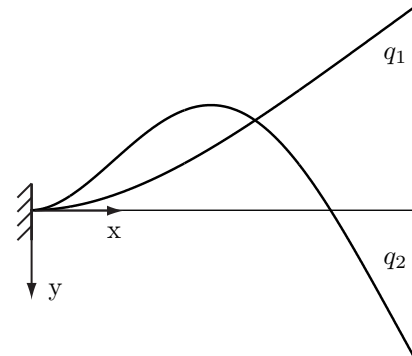


Abbildung 7.18: Eigenformen

Zylinderumströmung bei starrer Platte

Die Interaktionskraft der Fluid-Struktur-Wechselwirkung ist im Vergleich mit der Interaktionskraft im Grenzfall einer starren Platte bewertet. Dazu ist der Bereich der Platte aus dem Gebiet des Modells in Abbildung 7.16 ausgespart.

Das Gebiet des Fluids ist mit 11.510 Elementen des Typs Q9 beschrieben, mit denen die Geschwindigkeiten mit jeweils 46.409 Freiwerten für biquadratische Ansätze angenähert sind. Ein Auszug aus dem Finite-Elemente-Netz ist in Abbildung 7.21 im Bereich der Platte dargestellt. Das gesamte Gebiet ist derart unterteilt, dass die Geschwindigkeiten im Bereich des freien Endes der Platte mit nahezu rechteckigen Elementen optimal angenähert sind. Eine Näherungslösung ist mit der stabilisierten Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode entsprechend den Gleichungen (3.65) und (3.77) und einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,0025 \text{ s}$ berechnet. Sie ist in Abbildung 7.19 mit dem Geschwindigkeits- und Druckfeld zu dem in Abbildung 7.20 markierten Zeitpunkt dargestellt. Das Geschwindigkeitsfeld zeigt, dass sich die Strömung im Bereich des Starrkörpers mit Wirbeln ablöst. Dabei bilden sich entlang der starren Platte auf der einen Seite ein und auf der gegenüberliegenden Seite zwei Wirbel aus. Das Druckfeld lässt erwarten, dass sich eine flexible Platte nicht nur mit der Eigenform aus Abbildung 7.17a bewegt. Es ist vielmehr davon auszugehen, dass sie mit den räumlich versetzt angeordneten Bereichen erhöhten Drucks zu einer Bewegung mit einer gegenläufigen Krümmung ihrer Achse angeregt wird.

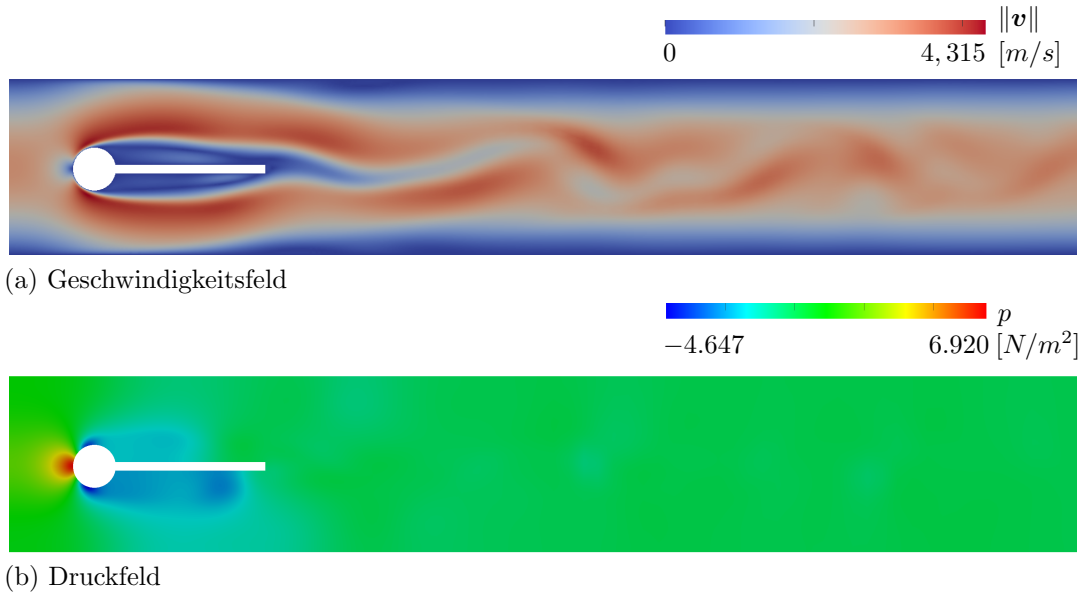


Abbildung 7.19: Starre Platte - Zustandsgrößen für den Zeitpunkt $t = 9,1325 \text{ s}$

Die Zeitverläufe der Komponenten der Interaktionskraft, die auf die Oberfläche des Starrkörpers wirkt, sind mit Gleichung (7.5) bestimmt und in Abbildung 7.20 dargestellt. Während der Zeitverlauf der Komponente F_y im Wesentlichen mit einer harmonischen Schwingung der Frequenz $f_1 \approx 4,17 \text{ s}^{-1}$ beschrieben ist, ist dem Zeitverlauf der Komponente F_x eine weitere harmonische Schwingung mit einer Frequenz

von $f_2 \approx 8,34 \text{ s}^{-1}$ überlagert. Sie ist vorrangig vom Körper der starren Platte beeinflusst (vergleiche Abbildung 7.20a mit 7.11b).

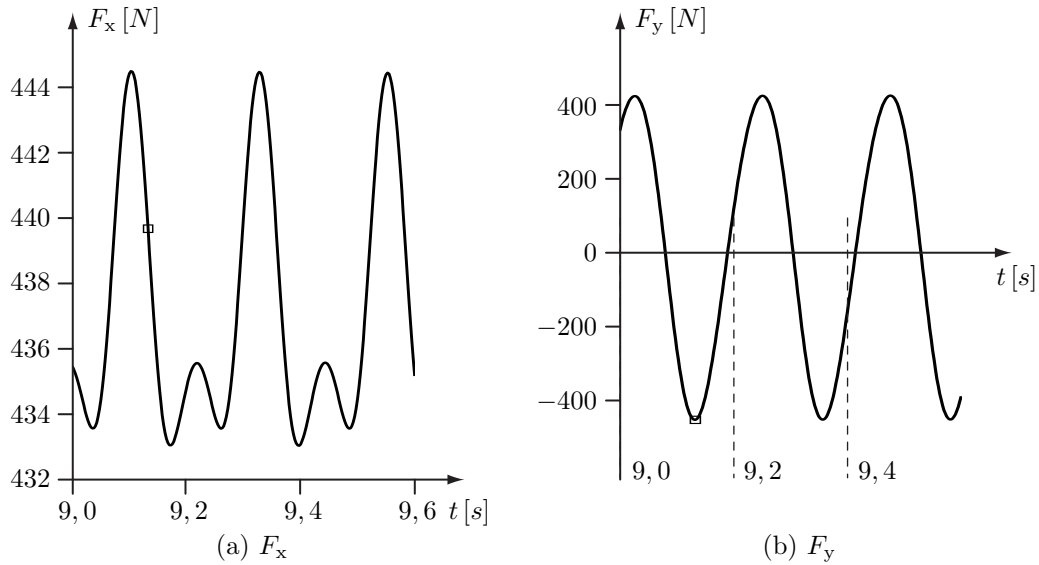


Abbildung 7.20: Interaktionskraft

Die Mittelwerte und Amplituden der Grundschwingungen sind nach Turek mit

$$F_{i,\text{Mittelwert}} = \frac{1}{2}(F_{i,\text{max}} + F_{i,\text{min}}) \quad \text{und} \quad F_{i,\text{Amplitude}} = \frac{1}{2}(F_{i,\text{max}} - F_{i,\text{min}})$$

bestimmt und in Tabelle 7.27 zusammen mit deren Referenzwerten angegeben. Der Vergleich mit den Referenzwerten zeigt, dass insbesondere der Mittelwert der Komponente F_x und die Amplitude der Komponente F_y mit der stabilisierten Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung in guter Näherung abgebildet sind. Dies verdeutlichen auch die berechneten Frequenzen, die mit $f_1^{F_x} \approx 4,44 \text{ s}^{-1}$ und $f_1^{F_y} \approx 4,17 \text{ s}^{-1}$ den Referenzwert einschließen. Der Unterschied in den Frequenzen ist im Wesentlichen mit der begrenzten Genauigkeit begründet, mit der die Verläufe ausgewertet sind.

Elementtyp	Interaktionskraft [Frequenz]	
	F_x in N [f_1 in s^{-1}]	F_y in N [f_1 in s^{-1}]
Q9	$438,74 \pm 5,7020$ [4, 444]	$-13,244 \pm 439,38$ [4, 167]
Referenz - CFD3 [76]	$439,45 \pm 5,6183$ [4, 396]	$-11,893 \pm 437,81$ [4, 396]

Tabelle 7.5: Charakteristische Kennwerte

Wirbelerregte flexible Platte

Bevor die wirbelerregte Schwingung der flexiblen Platte numerisch analysiert wird, sind die Einflüsse des Materialmodells und der Verteilung der Elastizität der Pseudo-Struktur auf die Bewegung des Finite-Elemente-Netzes im Gebiet des Fluids untersucht. Unabhängig vom Materialmodell eines St. Venant-Kirchhoff oder Neo-Hooke-Materials nach Gleichung (2.11) beziehungsweise (3.87) ist die Querdehnzahl mit einem Wert von $\nu = 0$ beschrieben. Damit ist sichergestellt, dass der Anteil an Schubverzerrungen am Verzerrungszustand so gering wie möglich und die Form der Elemente weitgehend erhalten ist. In Abbildung 7.21 ist ein ausgewählter Verformungszustand der flexiblen Platte mit dem adaptierten Finite-Elemente-Netz in deren näheren Umgebung dargestellt.

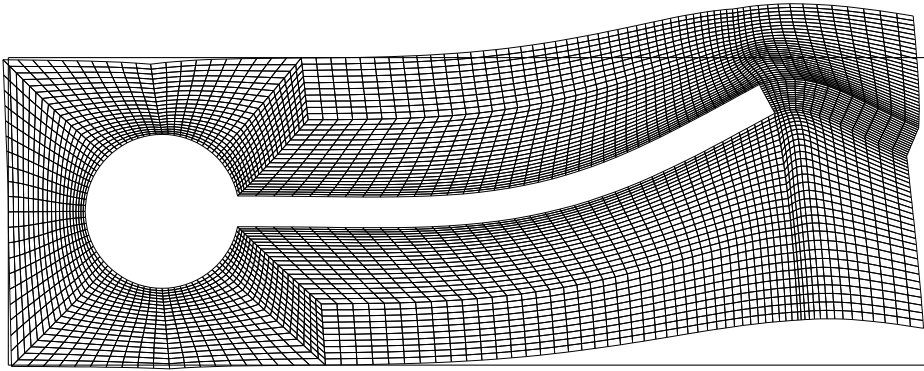


Abbildung 7.21: Netzverformung im Bereich der flexiblen Platte

Ist der Elastizitätsmodul im gesamten Gebiet der Pseudo-Struktur mit einem konstanten Wert beschrieben, entartet die Form der Elemente am freien Ende der flexiblen Platte selbst, wenn das Verformungsverhalten der Pseudo-Struktur dem eines Neo-Hooke-Materials entspricht (siehe Abbildung 7.22a). Erst wenn der Elastizitätsmodul

$$E = \begin{cases} (1 + 99 e^{-200r}) 5,6 \cdot 10^6 \\ 5,6 \cdot 10^6 \end{cases} \quad \text{mit } r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad (7.10)$$

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{4}{10} & \text{für } x \geq \frac{4}{10} \\ \text{sonst } x \end{cases} \quad \text{und} \quad y_i = \begin{cases} -\frac{1}{100} & \text{für } y \leq -\frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} & \text{für } y \geq \frac{1}{100} \\ \text{sonst } y \end{cases}$$

in der Nähe der flexiblen Platte und wie in Abbildung 7.22d dargestellt erhöht ist, kann deren Verformung auf das Finite-Elemente-Netz der Pseudo-Struktur übertragen werden. Mit einem veränderlichen Elastizitätsmodul kann die Verformung bereits mit der Elastizität eines St.Venant-Kirchhoff-Materials dargestellt werden.

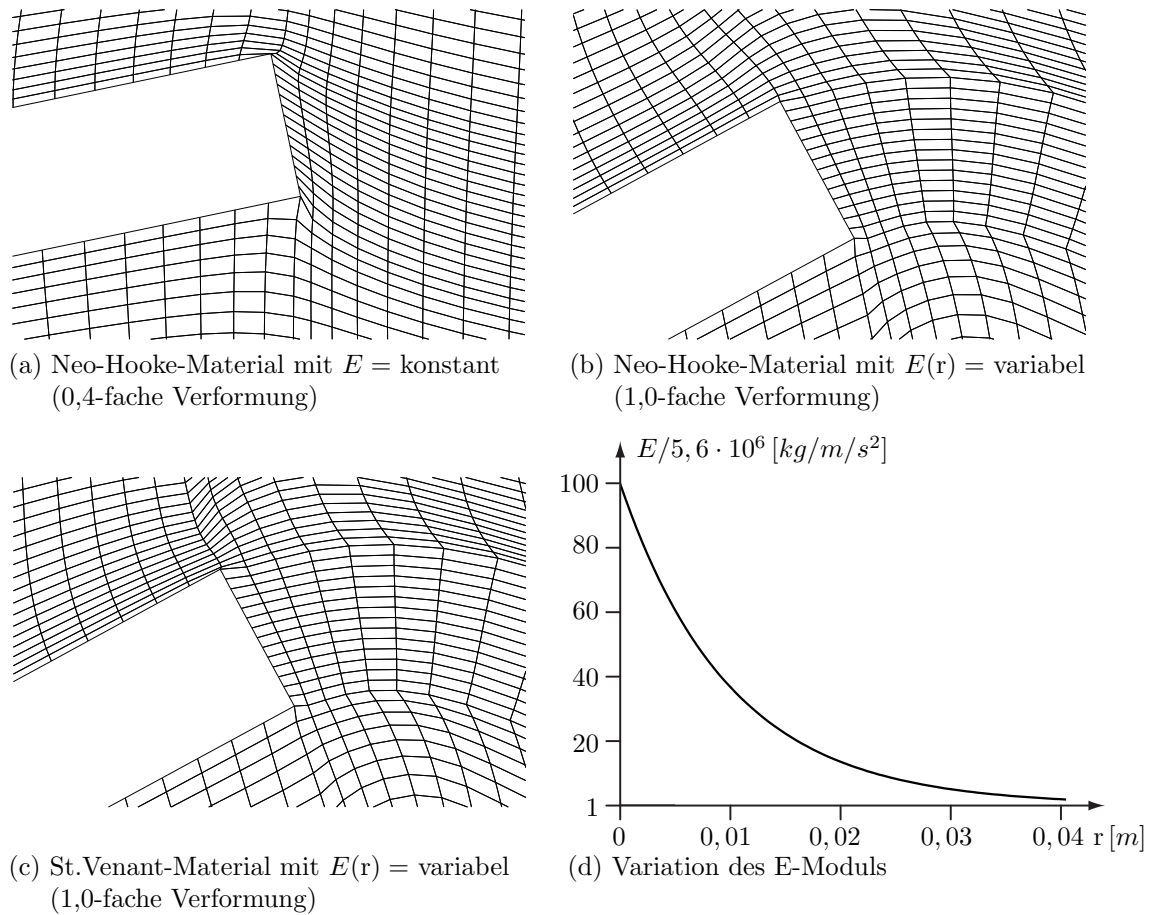


Abbildung 7.22: Netzverformung um das freie Ende der Kragplatte

Der Vergleich der Abbildungen 7.22b und 7.22c zeigt, dass die Form der Elemente besser erhalten ist, wenn sich diese einem Neo-Hooke-Material entsprechend verformen. Die sich mit zunehmender Kompression einstellende Versteifung eines Neo-Hooke-Materials ist deutlich an den Verformungen der Elemente zu sehen, die die obere Fläche der flexiblen Platte modellieren. Deren Formen sind auch im verzerrten Zustand nahezu aufrecht erhalten, während sich die gegenüberliegenden Elemente mit erhöhten Verzerrungen der Beanspruchung entziehen.

Die wirbelerregte Schwingung der flexiblen Platte ist alternativ mit Elementen des Typs Q9 oder Q4 berechnet. Die Verläufe für die Komponenten der Interaktionskraft zwischen Fluid und Struktur sind in Abbildung 7.23 dargestellt. Sie zeigen, dass sich das Geschwindigkeitsfeld mit dem Anstieg der Randgeschwindigkeit zunächst frei von Wirbeln in Hauptströmungsrichtung entwickelt. Der Verlauf der Komponente F_y zeigt, dass sich dessen Vorzeichen bereits unter der ansteigenden Randgeschwindigkeit ändert, infolgedessen die Bewegungsrichtung der flexiblen Platte wechselt. Nachdem die maximale Randgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2 \text{ s}$ erreicht ist, ist die Platte mit der Ausbildung und Ablösung der ersten Wirbel zu einer Schwingung angeregt, die sich mit steigender Intensität auch im Verlauf der Komponente F_x

zeigt. Mit der Schwingung sind die Strömungslinien umgelenkt, bis hin zu einem Geschwindigkeitsfeld mit ausgeprägten Querströmungen.

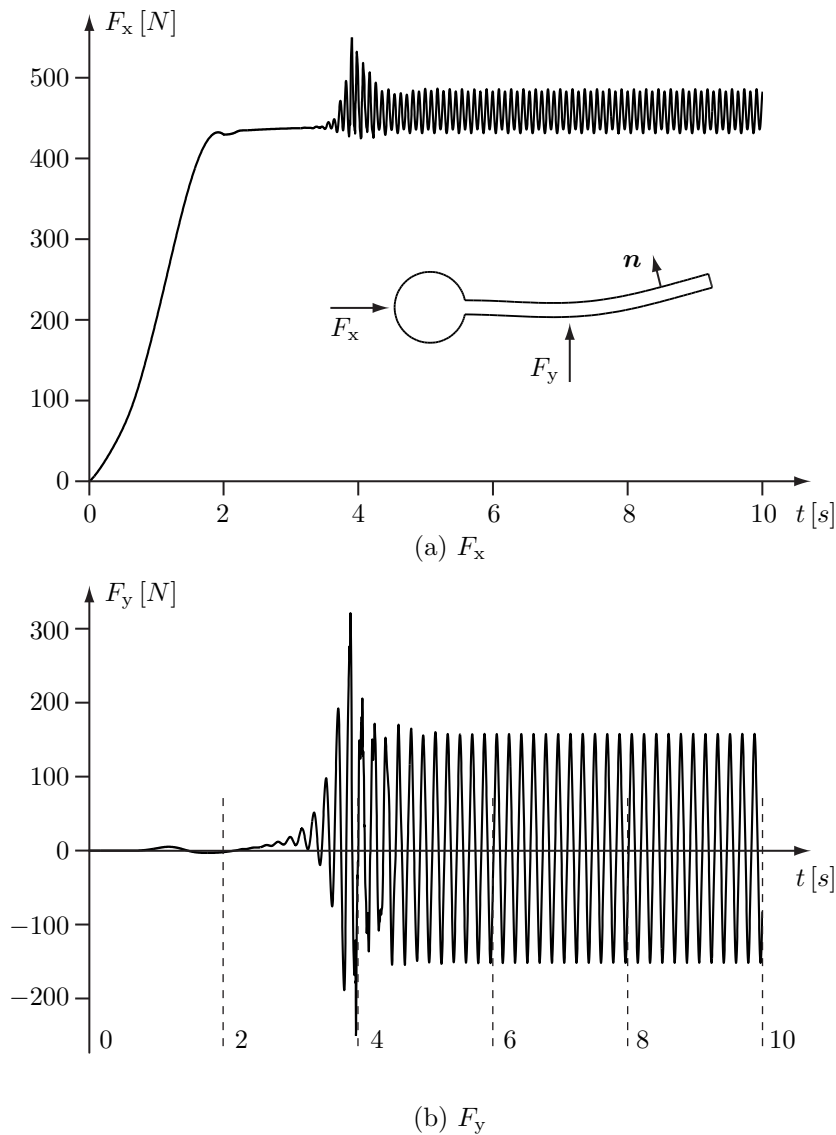


Abbildung 7.23: Interaktionskraft im analysierten Zeitbereich

Das Geschwindigkeitsfeld ist in Abbildung 7.24a zu dem in Abbildung 7.25 markierten Zeitpunkt dargestellt. An der Momentankonfiguration des Fluidgebietes ist ersichtlich, dass die Umströmung die flexible Platte im Vergleich mit der Schwingungsform in Abbildung 7.17a stärker krümmt. Die Schwingungsform der Platte zeigt, dass sich der Verlauf des Drucks nicht signifikant vom Druckverlauf bei starrer Platte unterscheidet (vergleiche Abbildung 7.24b mit 7.19b). Die räumlichen Verläufe des Geschwindigkeits- und Druckfelds lassen vermuten, dass die Charakteristik der Strömung im Wesentlichen erhalten wird.

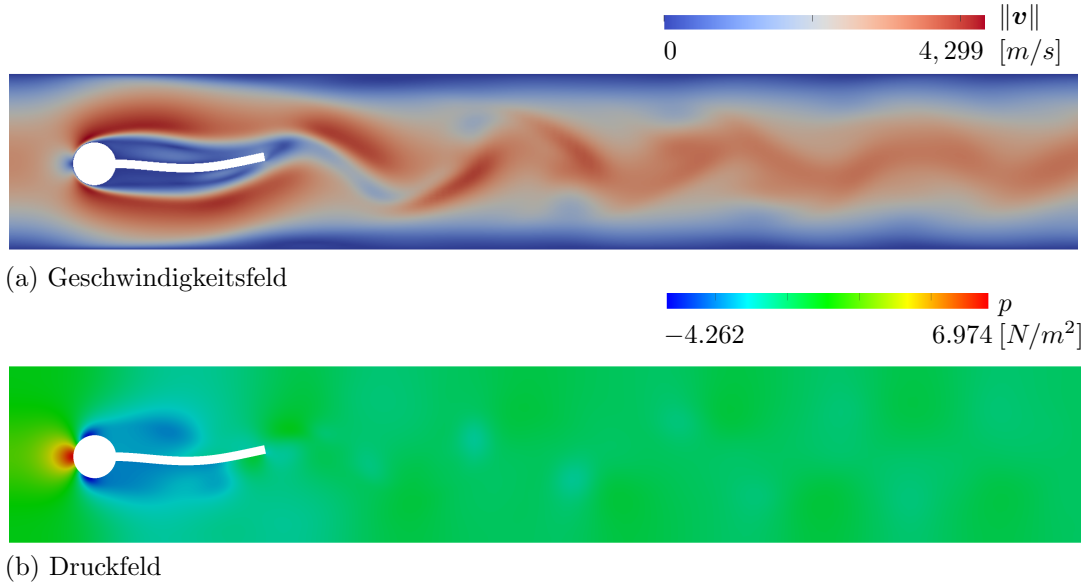


Abbildung 7.24: Flexible Platte - Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t = 7,0475 \text{ s}$

Deutlicher zeigt sich der Einfluss der Fluid-Struktur-Wechselwirkung an den Amplituden und Frequenzen, mit denen die Komponenten der Interaktionskraft bei stationärer Strömung schwingen (siehe Abbildung 7.25). Abbildung 7.25a zeigt, dass die Amplitude zu der Frequenz $f \approx 11 \text{ s}^{-1}$ wesentlich größer ist, wenn sich die Platte elastisch verformt, und sich damit der Beanspruchung in y-Richtung entzieht (vergleiche Abbildung 7.25b mit 7.20b).

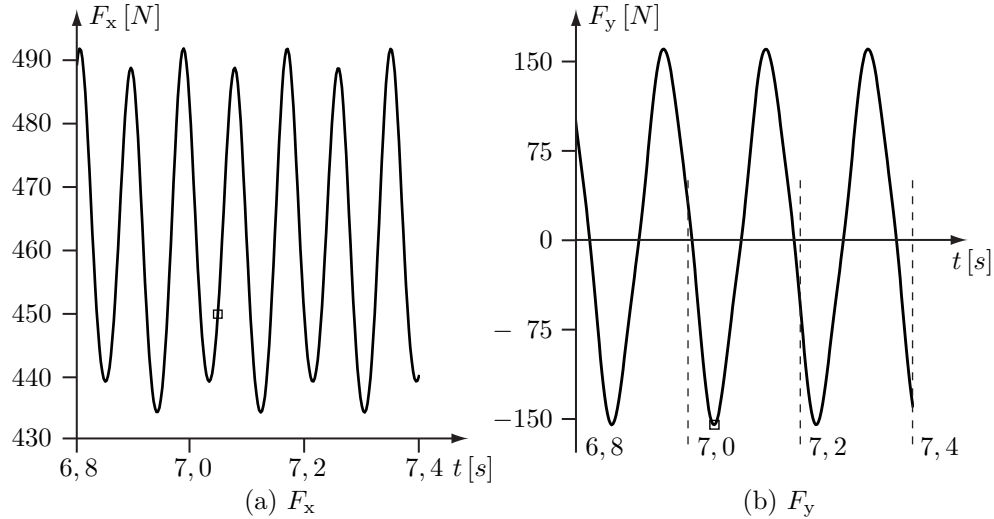


Abbildung 7.25: Interaktionskraft - stationäre Lösung

Neben der Interaktionskraft ist besonders die Grundfrequenz beeinflusst, mit der sich die flexible Platte bewegt. Schwingt ein Bernoulli-Balken mit gleichem Elastizitätsmodul, identischen Abmessungen und einer äquivalenten Massebelegung in den ersten beiden Eigenformen nach Gleichung (7.9) mit den Frequenzen $f_1 \approx 1,97 \text{ s}^{-1}$ und $f_2 \approx 12,37 \text{ s}^{-1}$, bewegt sich der materielle Punkt A im gekoppelten System mit einer Grundfrequenz von $f \approx 5,4 \text{ s}^{-1}$ (siehe Abbildung 7.26).

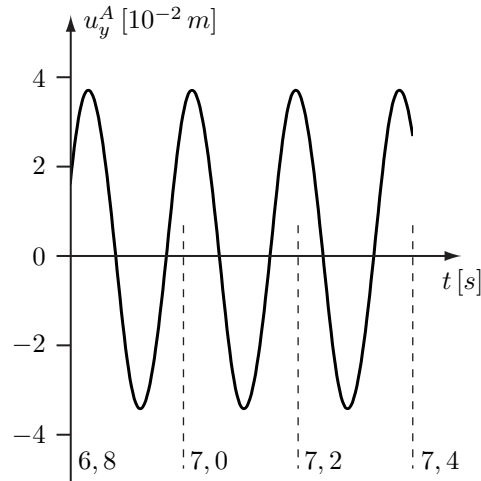


Abbildung 7.26: Verschiebungsverlauf

Elementtyp	Interaktionskraft [Frequenz]	
	F_x in N [f in s^{-1}]	F_y in N [f in s^{-1}]
Q9	$458,6 \pm 27,23$ [11, 1]	$2,87 \pm 154,90$ [5, 4]
Q4	$463,2 \pm 28,60$ [10, 5]	$2,34 \pm 157,72$ [5, 4]
Referenz - FSI3 [76]	$457,3 \pm 22,66$ [10, 9]	$2,22 \pm 149,78$ [5, 3]

(a) Interaktionskraft

Elementtyp	Verschiebung [Frequenz]	
	u_x^A in mm [f in s^{-1}]	u_y^A in mm [f in s^{-1}]
Q9	$-2,79 \pm 2,54$ [10, 5]	$1,46 \pm 34,86$ [5, 5]
Q4	$-2,90 \pm 2,65$ [11, 1]	$1,49 \pm 35,61$ [5, 5]
Referenz - FSI3 [76]	$-2,69 \pm 2,53$ [10, 9]	$1,48 \pm 34,38$ [5, 3]

(b) Verschiebung des materiellen Punktes A

Abbildung 7.27: Charakteristische Kennwerte des FSI3-Benchmarks

Die signifikante Abweichung von den ersten beiden Frequenzen des Bernoulli-Balkens kann nicht allein mit den unterschiedlichen Modellgleichungen begründet werden. Die in Bezug auf die Ähnlichkeit der Bewegungsformen gegenüber der zweiten Frequenz des Bernoulli-Balkens reduzierte Frequenz, mit der sich der materielle Punkt A bewegt, ist im Wesentlichen eine Folge des von der Struktur zu verdrängenden Fluids. Es erhöht virtuell die Masse der Platte, so dass sich deren Eigenfrequenzen reduzieren.

Die charakteristischen Werte der Interaktionskraft und Verschiebung des materiellen Punktes A sind in den Tabellen 7.27a und 7.27b zusammengestellt. Sie zeigen, dass das Strömungsfeld und die Schwingung der flexiblen Platte sowohl mit Elementen des Typs Q9 als auch mit Elementen des Typs Q4 in Bezug auf die Referenzwerte nach Turek gut angenähert sind.

Entsprechend der Zylinderumströmung kann auch mit dem Modell einer wirbelerregten Platte keine eindeutige Aussage zu Gunsten einer Approximation der Geschwindigkeiten in den Elementen getroffen werden. So ist festzuhalten, dass die Bewegung newtonscher Fluide mit linearen und quadratischen Lagrange-Ansätzen gleich gut numerisch analysiert werden kann. Dass lineare Lagrange-Ansätze für die Geschwindigkeiten und den Druck eine PSPG-Stabilisierung der Finite-Element-Formulierung nach Gleichung (3.80) erfordern, motiviert dennoch die Verwendung von quadratischen Lagrange-Ansätzen, mit denen die LBB-Bedingung erfüllt werden kann (siehe Kapitel 3.2.2.2).

8 Numerische Analyse von Silos

Im folgenden Kapitel werden Modelle für Silos vorgestellt, mit denen die Verformungen und Beanspruchungen von dünnwandigen Siloschalen während der Lagerung und der Entnahme von Schüttgütern numerisch analysiert sind.

8.1 Modellbildung

Mit den nachfolgend vorgestellten Modellen sind die Bewegungen und Beanspruchungen von Siloschalen und Schüttgüter sowohl nach Eurocode 1 Teil 4 als auch infolge selbstinduzierter Entleerungen numerisch analysiert. Es werden Modelle für Entleerungen von stählernen Rundsilos vorgestellt, die alternativ mit granularen oder flüssigen Schüttgütern befüllt sind. Dabei wird zwischen zentrischen Entleerungen und exzentrischen Entleerungen mit Ausbildung von Fließkanälen unterschieden. Ist mit dem Lastmodell nach Eurocode 1 Teil 4 die Lage eines Fließkanals noch explizit vorgegeben, so ist mit gekoppelten Modellen für Siloschalen und Schüttgüter dessen räumliche Entwicklung im Zeitbereich verfolgt. Sind Werte und Verläufe von Zustandsgrößen spezieller Modelle für abweichende Parameter analysiert, werden diese im entsprechenden Kapitel angegeben. Es ist darauf hingewiesen, dass mit der Bezeichnung von Flüssigkeiten als flüssige Schüttgüter von der Definition eines Schüttgutes als stückiges Gemenge abgewichen wird.

8.1.1 Siloschalen

Das elastische Verhalten der stählernen Siloschalen mit einer Dichte von $\rho_0 = 7850 \text{ kg/m}^3$ ist mit dem Elastizitätsmodul $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ und der Querdehnzahl $\nu = 0,3$ eines St.Venant-Kirchhoff-Materials und den Modellgleichungen der Strukturmechanik für große Rotationen beschrieben. Das inelastische Verhalten von Stahl ist mit Modellgleichungen für sich viskoplastisch verfestigende Materiale für von-Mises-Plastizität formuliert. Es ist ein Stahl mit einer Fließspannung von $\sigma_y = 2,2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ eingesetzt, dessen Entwicklung inelastischer Verformungen von der Viskosität $d = 4 \cdot 10^6 \text{ N s}^3/\text{m}^2$ und dem Spannungsexponenten $n = 4$ beeinflusst ist. Die isotrope Verfestigung verändert sich mit dem Parameter $b_\chi = 30$ und ist mit dem Sättigungswert $q_\chi = 8,7 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ begrenzt. Die kinematische Verfestigung entwickelt sich mit $b_\alpha = 210$ schneller als die isotrope Verfestigung. Die Intensität der kinematischen Verfestigung ist mit dem Sättigungswert $q_\alpha = 1,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ begrenzt.

Es sind Siloschalen mit glatten oder rauen Oberflächen untersucht. Raue Oberflächen sind für Reibkoeffizienten mit einem Wert von $\mu = 0,4$ modelliert. Eine Schubspannung ist nur bei gleichzeitiger Wirkung einer Druckspannung übertragen. Wird nicht explizit auf glatte Oberflächen hingewiesen, ist im Folgenden von rauen Oberflächen auszugehen.

Die Beanspruchungen von Siloschalen sind für Silos mit flachen oder steilen Auslauftrichtern, mit zentrisch oder exzentrisch angeordneten Auslauföffnungen untersucht. Dabei ist jedes Silo über einen Auslauftrichter mit einer Auslauföffnung entleert. Der flache Auslauftrichter ist um 20° geneigt und schließt unmittelbar an den zylindrischen Schaft der Siloschalen mit einem inneren Radius von $r_i = 3\text{ m}$ und einer Dicke von $t_s = 0,02\text{ m}$ an. Er verjüngt die Schalen bis auf einen Wert von $r_i = 0,7\text{ m}$ an der jeweiligen Auslauföffnung. Im Gegensatz dazu geht der kegelförmige Bereich des steilen Auslauftrichters mit stetig verlaufender Krümmung kontinuierlich in den zylindrischen Schaft der Schalen über. Der steile Trichter hat eine Höhe von $1,8\text{ m}$. Dessen Übergang innerhalb eines Bereichs von 1 m Höhe ist mit dem Verlauf einer quadratischen Funktion für einen um 45° geneigten Trichter beschrieben. Die Auslauföffnung eines Silos ist für exzentrische Entleerungen bei Aufrechterhaltung ihrer kreisrunden Form um 1 m im Grundriss verzogen.

8.1.2 Schüttgüter

Das mechanische Verhalten von flüssigen und granularen Schüttgütern ist mit den Navier-Stokes-Gleichungen für newtonsche beziehungsweise binghamische Fluide beschrieben. Allen Schüttgütern ist eine initiale Dichte von $\rho_0 = 1300\text{ kg/m}^3$ und eine dynamische Viskosität von $\rho\nu = 1000\text{ Ns/m}^2$ gemein. Sie befüllen die Silos über eine Höhe von 8 m . Ausgehend von befüllten Silos setzen sich die freien Oberflächen der Schüttgüter infolge der Gravitation mit einem Wert von $\|\mathbf{g}\| = 9,81\text{ m/s}^2$ selbstinduziert in Bewegung. Ist bei inkompressiblen Schüttgütern die Auslauföffnung eines Silos von Anfang der numerischen Berechnungen geöffnet, verdichten sich kompressible Schüttgüter zuerst bei geschlossener Auslauföffnung. Im Fall kompressibler Schüttgüter ist die Auslauföffnung nach sechs Sekunden und innerhalb einer Sekunde geöffnet. Der Übergang von einem geschlossenen bis hin zu einem geöffneten Auslauf ist mit einer nachgiebigen Lagerung umgesetzt, deren Viskosität mit

$$\mu = \begin{cases} 1e^8 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} & \text{für } t < 6\text{ s} \\ (1e^8 - 1) \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} \left(1 - 3\frac{(t-6\text{ s})^2}{1\text{ s}^2} + 2\frac{(t-6\text{ s})^3}{1\text{ s}^3} \right) + 1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} & \text{für } 6\text{ s} \leq t \leq 7\text{ s} \\ 1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} & \text{für } t > 7\text{ s} \end{cases} \quad (8.1)$$

im Zeitverlauf verändert ist.

Die Bewegungen der freien Oberflächen von Schüttgütern und deren Wechselwirkungen mit den umschließenden Schalen sind für Schüttgüter mit einem Kompressionsmodul von $K = 2 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$ untersucht. Im Unterschied zu einem flüssigen

Schüttgut definiert das Fließkriterium nach Drucker-Prager zusammen mit einer Regularisierung von $\epsilon = 0,002 \text{ s}^{-1}$ den Phasenübergang zwischen einem ruhenden und einem strömenden granularen Schüttgut. Es sind Entleerungen von Silos numerisch analysiert, die mit Schüttgütern mit einem Schüttwinkel von $\phi_i = 20^\circ$ befüllt sind. Mit einem Schüttwinkel von $\phi_i = 20^\circ$ entleeren sich Silos sowohl mit einem flachen als auch mit einem steilen Auslaufrichter nach Kapitel 8.1.1 selbstständig (siehe Abbildung 8.1). Hingegen kommen die Strömungen infolge von Brückenbildungen zum Erliegen, wenn die Silos mit Schüttgütern mit einem Schüttwinkel von $\phi_i = 40^\circ$ befüllt sind.

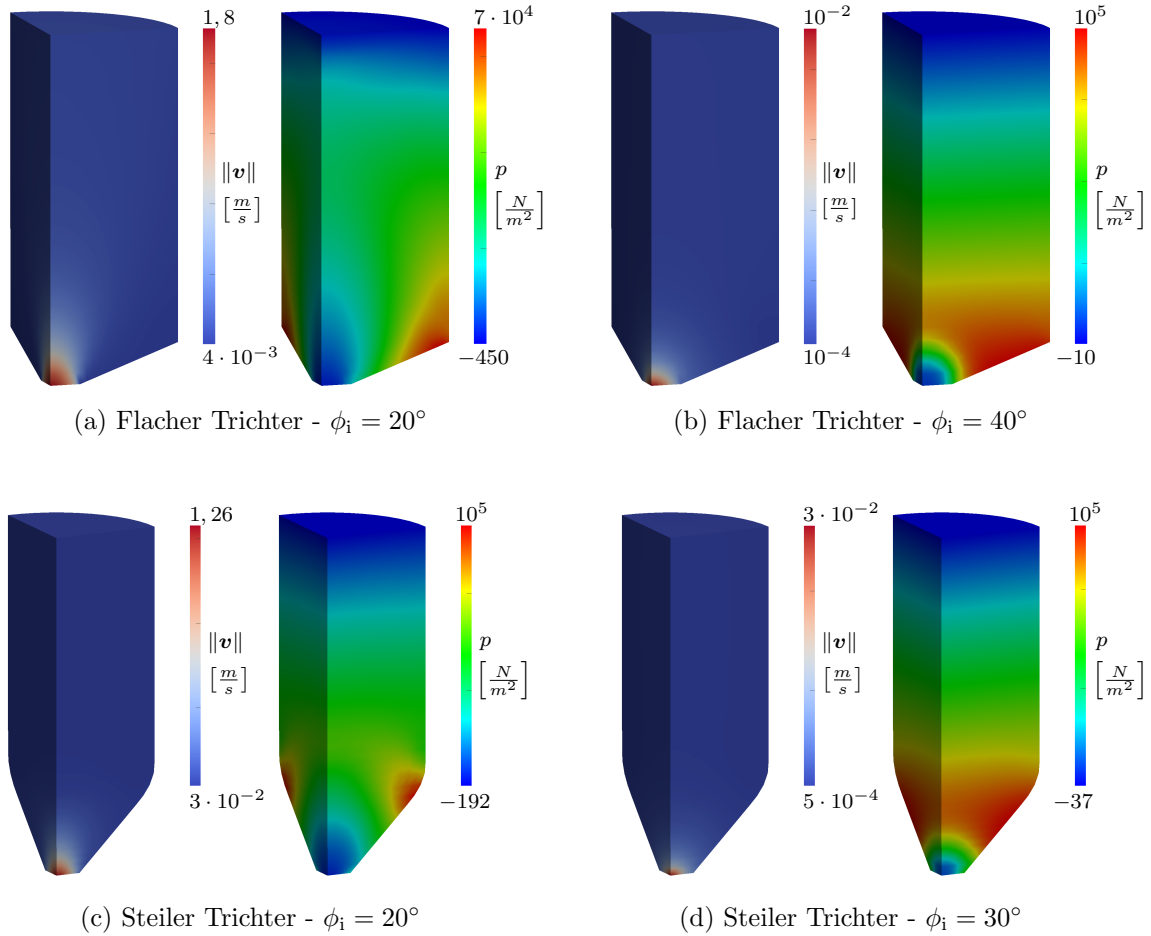


Abbildung 8.1: Zustandsgrößen in durchströmten Silos

Für moderate Bewegungen ist das mechanische Verhalten granularer Schüttgüter alternativ mit kontinuumsmechanischen Modellen für Strukturen mit elastischem und auch viskoplastischem Materialverhalten formuliert, deren Parameter in den entsprechenden Kapiteln beschrieben sind.

Janssen beschreibt den Spannungszustand in einem Rundsilo, das mit einem granularen Schüttgut befüllt ist, unter der Annahme einer starren Siloschale mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Mit deren Lösung sind Lastmodelle entwickelt, mit denen nach Eurocode 1 Teil 4 [17] Einwirkungen auf Siloschalen

abgebildet werden können. Sie sind für zentrische und exzentrische Entleerungen von Rundsilos nachfolgend dargestellt (vergleiche RUCKENBROD [52]).

Rotationssymmetrische Belastung nach Janssen

Der Spannungszustand in einem ruhenden Schüttgut, umschlossen von einer zylindrischen Siloschale, ist nach JANSSEN [36] mit dem vertikalen Kräftegleichgewicht

$$p_v A + \gamma A dz = (p_v + dp_v) A + p_w U dz \quad (8.2)$$

bestimmt. Es ist an dem in Abbildung 8.2 dargestellten differentiellen Scheibenelement formuliert und beschreibt mit Berücksichtigung der Wandreibung die Veränderung der Spannung p_v .

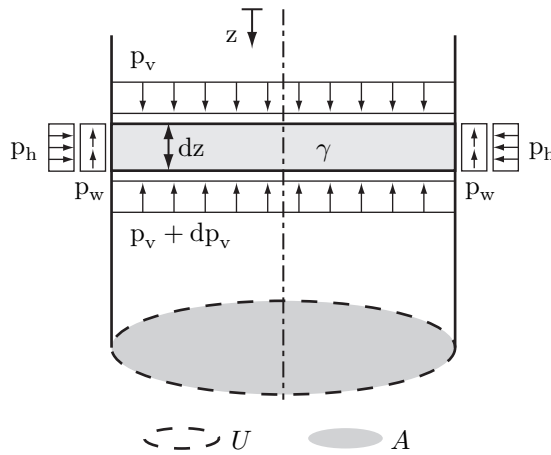


Abbildung 8.2: Scheibenelement

Die Bezeichnungen der Beschreibungsvariablen entsprechen der Nomenklatur des Eurocode 1 Teil 4, so dass p_v auch als Vertikallast bezeichnet wird. Die Beschreibungsvariablen des Eurocode 1 Teil 4 sind im Folgenden mit normaler Zeichenlage gesetzt.

Die Intensität der Wandreibung ist mit dem Wandreibungskoeffizienten

$$\mu_w = \frac{p_w}{p_h} \quad (8.3)$$

bestimmt, der die Rauigkeit der Oberfläche einer Siloschale beschreibt und die Schubspannung p_w in Relation zu der Normalspannung p_h setzt. Die Schubspannung und die Normalspannung sind alternativ als Wandreibungslast beziehungsweise Horizontallast bezeichnet. Das Materialverhalten des Schüttgutes ist mit dem Horizontallastverhältnis

$$K = \frac{p_h}{p_v} \quad (8.4)$$

beschrieben, mit dem die Horizontallast in direktem Zusammenhang mit der Vertikallast steht. Mit $dp_v/dz = \partial p_v/\partial z$ ist Gleichung (8.2) in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung überführt und der Verlauf der Horizontallast für die Anfangsbedingung $p_v(z=0) = 0$ mit

$$p_h(z) = \frac{\gamma A}{\mu_w U} \left(1 - e^{-\frac{K\mu_w U}{A}z}\right) \quad (8.5)$$

als deren spezielle Lösung beschrieben. Im Unterschied zu der linearen Druckverteilung in einem Flüssigkeitsbehälter entwickelt sich die Horizontallast in einem Schüttgutsilo nach Gleichung (8.5) exponentiell gegen einen endlichen Wert der unabhängig von der Höhe des Silos ist.

Auf Grundlage der von Janssen angegebenen Differentialgleichung sind nach Eurocode 1 Teil 4 sowohl die Belastungen von zylindrischen Schalen befüllter Silos als auch deren Belastungen während zentrischer Entleerungen abgebildet. Füll- und Entleerungslasten sind im Folgenden mit f beziehungsweise e indiziert.

Asymmetrische Belastung nach Rotter

Die erhöhte Beanspruchung eines Rundsilos mit großer Exzentrizität während einer Entleerung ist nach Eurocode 1 Teil 4 mit dem von ROTTER [53] entwickelten Lastmodell zu bestimmen. Die Entleerung über einen im Grundriss exzentrisch verlaufenden Fließkanal führt im Übergangsbereich zwischen ruhendem und strömendem Schüttgut zu einer erhöhten Belastung der Siloschale. Das Modell nach Rotter unterteilt ein Silo in Umfangsrichtung in drei Bereiche mit unterschiedlicher Intensität der Horizontallast (siehe Abbildung 8.3).

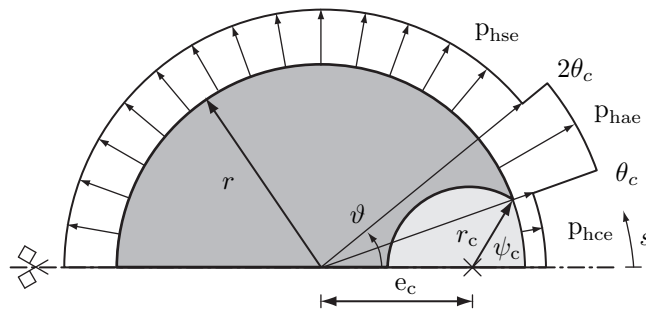


Abbildung 8.3: Exzentrischer Fließkanal - Geometrie und Belastung

Die Werte der Horizontallast sind mit

$$p_{hse} = \gamma K z_o (1 - e^{-z/z_o}), \quad p_{hce} = \gamma K z_{oc} (1 - e^{-z/z_{oc}}) \quad (8.6)$$

und

$$p_{hae} = 2 p_{hse} - p_{hce} \quad (8.7)$$

in Abhängigkeit der charakteristischen Längen

$$z_o = \frac{1}{K} \frac{A}{\mu_w U} \quad \text{und} \quad z_{oc} = \frac{1}{K} \left(\frac{A_c}{U_{wc} \mu_w + U_{sc} \tan(\phi_i)} \right) \quad (8.8)$$

definiert.

Die Querschnittsfläche

$$A_c = (\pi - \psi_c) r_c^2 + \theta_c r^2 - r r_c \sin(\psi_c - \theta_c) \quad (8.9)$$

ist mit den Winkeln

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{r^2 + e_c^2 - r_c^2}{2 r e_c}\right) \quad \text{und} \quad \psi_c = \arcsin\left(\frac{r}{r_c} \sin(\theta_c)\right) \quad (8.10)$$

und in Abhängigkeit des Fließkanalradius r_c sowie des inneren Radius r der Siloschale bestimmt. Die Bogenlänge der Kontaktfläche zwischen Fließkanal und Siloschale und die Bogenlänge der Kontaktfläche zwischen Fließkanal und ruhendem Schüttgut ist mit

$$U_{wc} = 2 \theta_c r \quad \text{beziehungsweise} \quad U_{sc} = 2 r_c (\pi - \psi_c) \quad (8.11)$$

berechnet. Ist die genaue Lage des Fließkanals unbekannt, ist dessen Exzentrizität nach Eurocode 1 Teil 4 mit

$$e_c = r \left(\frac{\mu_w}{\tan(\phi_i)} \left(1 - \frac{r_c}{r} \right) + \left(1 - \frac{\mu_w}{\tan(\phi_i)} \right) \sqrt{1 - \frac{r_c}{r}} \right) \quad (8.12)$$

anzunehmen. Während die Gleichungen (8.9) bis (8.11) mit geometrischen Beziehungen hergeleitet sind, stellt Gleichung (8.12) eine empirische Formel dar.

Im Bereich des ruhenden Schüttgutes ist die Horizontallast mit der von Janssen angegebenen Gleichung (8.5) ausgewertet. Entlang der Kontaktfläche zwischen Fließkanal und Siloschale ist der Wert der Horizontallast nach Rotter an einem fiktiven Silo mit Abmessungen und Eigenschaften des Fließkanals bestimmt. Der Übergangsbereich zwischen ruhendem und strömendem Schüttgut ist in Bezug auf dessen Abmessungen der Kontaktfläche zwischen Fließkanal und Siloschale identisch. Der Wert der erhöhten Horizontallast ist mit Gleichung (8.7) bestimmt. Mit Gleichung (8.7) ist das Lastmodell nach Rotter nur in einer Richtung im horizontalen Gleichgewicht der Kräfte, so dass der Anteil

$$F_h = \int_0^h \int_0^{2\pi} p(\vartheta, z) \cos(\vartheta) r d\vartheta dz \quad (8.13)$$

über die Schale in den Baugrund abzuleiten ist.

8.2 Verformungsverhalten dünnwandiger Siloschalen

Der Einfluss des inelastischen Materialverhaltens stählerner Baustoffe auf die Verformungen von dünnwandigen Siloschalen mit einer jeweiligen Dicke von $t_s = 0,008\text{ m}$ ist bis hin zu signifikanten Verlusten von Stabilität für rotationssymmetrische und unsymmetrische Entleerungslasten numerisch analysiert. Die Entleerungslasten nach Janssen und Rotter modellieren 18 m hohe Schüttgutsäulen mit einer Wichte von $\gamma = 14 \cdot 10^3\text{ N/m}^3$. Die mechanischen Eigenschaften des Schüttgutes entsprechen mit dem Horizontallastverhältnis $K = 0,5$ und dem Schüttwinkel $\phi_i = 35^\circ$ denen von Sand. Die im Grundriss unsymmetrische Entleerungslast ist für einen Fließkanal mit einem Radius von $r_c = 1,2\text{ m}$ und einer Exzentrizität nach Gleichung (8.12) bestimmt. Die Belastungen sind linear mit der Zeit gesteigert. Die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Schalen verformen, sind für $d_0 = 5.000\text{ kg/m}^3/\text{s}$ mit masseproportionalen Dämpfungen verlangsamt.

Es sind die Verformungen von Schalen untersucht, deren jeweiliger Auslaufrichter mit einem Aussteifungsring angeschlossen ist (vergleiche Abbildung 1.1). Dabei ist angenommen, dass die Steifigkeiten des Aussteifungsringes wesentlich höher sind als die Steifigkeiten der zusammengesetzten Siloschalen, so dass die Kreiszyinderschalen in guter Näherung getrennt von den Auslaufrichtern numerisch analysiert sind. Weiterhin ist unterstellt, dass sich der Aussteifungsring nur mäßig verdreht, so dass die Kreiszyinderschalen auf Höhe ihres Aussteifungsringes unverschieblich gelagert sind. Diese Annahmen führen auf das in Abbildung 8.8 dargestellt Modell der 20 m hohen Kreiszyinderschalen.

8.2.1 Zentrische Entleerungen

Zuerst ist das Verformungsverhalten einer Kreiszyinderschale mit elastischem Materialverhalten bei rotationssymmetrischer Belastung diskutiert. Darauf aufbauend ist anschließend der Einfluss viskoplastischen Materialverhaltens auf die Verformung einer stählerner Kreiszyinderschale dargestellt.

Abbildung 8.4 zeigt den Verformungszustand einer Kreiszyinderschale mit elastischem Materialverhalten bei 0,1-facher rotationssymmetrischer Belastung nach Janssen. Mit der maximalen Aufweitung der Schale mit einem Wert von $|u_r| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 4,2 \cdot 10^{-5}\text{ m}$ ist deren Verformung erst sichtbar, wenn sie überhöht dargestellt ist, so dass bei diesem Lastniveau der Einfluss des geometrisch nichtlinearen Verformungsverhaltens vernachlässigt werden kann. In diesem Fall ist das Verformungsverhalten der dünnwandigen Kreiszyinderschale in radialer Richtung alternativ mit der Differentialgleichung (3.56) des gebetteten Balkens beschrieben, entsprechend deren Lösung eine Biegestörung nach der charakteristischen Länge von

$$l_{\text{char}} \approx 0,72\text{ m} \quad \text{für} \quad k_b l_{\text{char}} = 6 \quad \text{mit} \quad k_b = \sqrt{\frac{\sqrt{3}(1 - \nu^2)}{r t_s}} \quad (8.14)$$

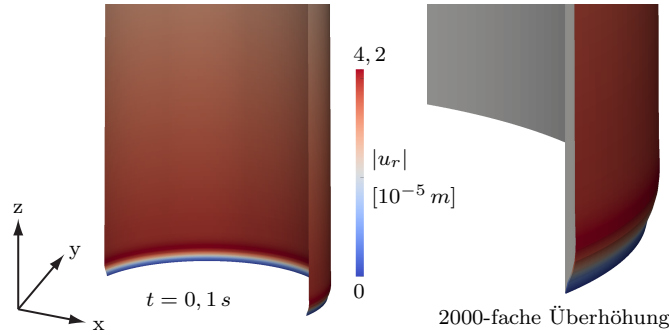


Abbildung 8.4: Lineares Verformungsverhalten bei rotationssymmetrischer Belastung

im Wesentlichen abgeklungen ist (siehe Gleichung (3.57)). So verkrümmt sich die Schale lokal im Bereich der unverschieblichen Lagerung und passt damit deren Aufweitung an die Randbedingungen an. Die Aufweitung der Schale ist im Wesentlichen von der Horizontallast bestimmt. Der Verformungsanteil infolge der Wandreibrungslast ist um ein Vielfaches geringer, so dass der Effekt der Querdehnung im vorliegenden Fall von untergeordneter Bedeutung ist (vergleiche ESCHENAUER [22]). Der Verlauf der Krümmung ist über die Höhe der Schale nach Gleichung (3.57) mit der Funktion einer exponentiell fallenden Schwingung beschrieben. Wenn auch der Einfluss des rotatorischen Anteils in der Bewegung mit steigendem Lastniveau zunimmt, ist von der Wellenlänge $2\pi/k_b \approx 0,76\text{ m}$ die wechselseitige Krümmung der Schale bei 13,5-facher Belastung beeinflusst (siehe Abbildung 8.5).

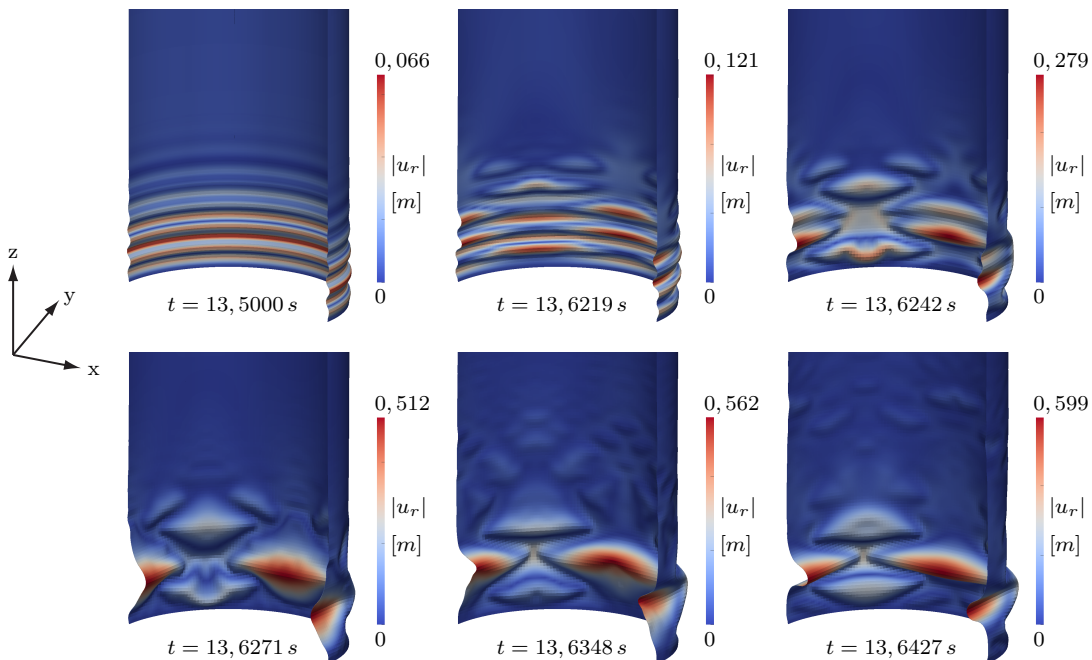


Abbildung 8.5: Schalenbeulen bei rotationssymmetrischer Belastung

Erste Beulen bilden sich zum Zeitpunkt $t \approx 13,62 \text{ s}$ aus. Sie vereinigen sich mit zunehmendem Lastniveau, bis sich ein im Grundriss stabiles Beulfeld in Form eines Quadrates ausbildet. Das stabile Beulfeld entwickelt sich infolge der geringen Masseträgheit der dünnwandigen Schale innerhalb von $\Delta t \approx 0,021$ Sekunden, so dass der Verschiebungsverlauf auch Beulen geringerer Intensität aufweist, die sich über die Höhe der Schale fortbilden. Eine weitere Laststeigerung ist möglich, wenn Bereiche der Schale untereinander in Kontakt treten und sich damit aufeinander abstützen. Mit dem räumlichen Verschiebungsverlauf zum Zeitpunkt $t = 13,6427 \text{ s}$ ist die Gebrauchstauglichkeit der Schale jedoch nicht mehr gegeben, so dass derart überkritische Zustände nicht weiter verfolgt werden.

Im Gegensatz zum Verformungszustand in Form eines regelmäßigen Beulfeldes bildet sich bei einer $t_s = 0,0080 \text{ m}$ dicken stählernen Kreiszyinderschale nach Kapitel 8.1.1 eine Wulst in unmittelbarer Nähe ihrer unverschieblichen Lagerung aus. Die in Abbildung 8.6 dargestellte Wulst bildet sich bereits zum Zeitpunkt $t \approx 5,37 \text{ s}$ aus, so dass die Gebrauchstauglichkeit der stählernen Schale im Vergleich mit der zuvor dargestellten Schale mit ausschließlich elastischem Materialverhalten bereits bei 0,4-facher Belastung erheblich beeinträchtigt ist.

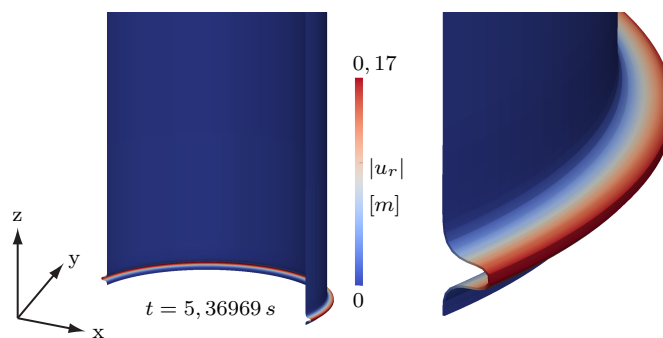


Abbildung 8.6: Elastoviskoplastizität -
rotationssymmetrische Belastung

8.2.2 Exzentrische Entleerungen

Wirkt auf eine Kreiszyinderschale mit elastischem Materialverhalten im Übergangsbereich zwischen ruhendem und strömendem Schüttgut bei exzentrischer Entleerungen eine lokal erhöhte Horizontallast, wölbt sie sich im Bereich des Fließkanals bei 0,1-facher Belastung großflächig nach innen (siehe Abbildung 8.7).

Mit der im Grundriss unsymmetrischen Belastung ist die Kreiszyinderschale in Umfangsrichtung biegebeansprucht, so dass sie sich im Vergleich mit der Verformung bei rotationssymmetrischer Belastung deutlich stärker verformt (vergleiche Abbildung 8.4). Die erhöhte Verformung mit einem maximalen Wert von $|u_r| = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ist eine Folge der in Umfangsrichtung geringen Steifigkeit von Kreiszyinderschalen. Sie ist vorrangig von der Biegesteifigkeit $B = E t_s^3 / 12 (1 - \nu^2)$ bestimmt, die für die hohe Steifigkeit von dünnwandigen Schalen mit positiver Gauß'scher Krümmung von untergeordneter Bedeutung ist (vergleiche ESCHENAUER [22]).

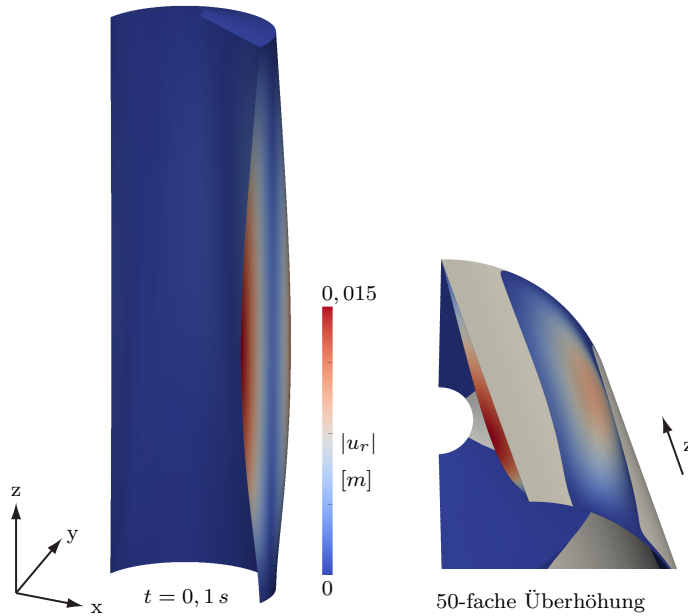


Abbildung 8.7: Lineares Verformungsverhalten bei unsymmetrischer Belastung

Mit der überhöhten Darstellung des Verschiebungszustandes ist ersichtlich, dass sich die Kreiszylinderschale mit nahezu linearem Verformungsverhalten bei exzentrischer Entleerung vorrangig um ihre Rotationsachse deformiert. Obwohl die Schale infolge der unsymmetrischen Belastung nach Gleichung (8.13) mit einer resultierenden Horizontallast beansprucht ist, stellt sie sich nicht erkennbar schief. Die geringe Schiefstellung ist mit der hohen Biegesteifigkeit $EI = E \frac{\pi}{4} (r_a^4 - r_i^4)$ eines äquivalenten Stabes begründet, mit dem das globale Verformungsverhalten der Kreiszylinderschale in erster Näherung beschrieben ist. Erst wenn die Schale mit der Ausbildung von Beulen im Bereich der Lagerung die Belastung zunehmend stärker lokal über Biegung abträgt und das Verformungsverhalten nicht mehr mit einem Stabtragwerk beschrieben werden kann, stellt sie sich in Richtung der resultierenden Horizontallast schief (siehe Abbildung 8.8). Sind die Beulformen in den Abbildungen 8.5 und 8.8 auch ähnlich, so ist die Stabilität der Kreiszylinderschale im Fall der exzentrischen Entleerung bereits bei 6,54-facher Belastung deutlich reduziert.

Auch bei der Belastung infolge exzentrischer Entleerung beeinflusst das viskoplastische Materialverhalten einer stählernen Kreiszylinderschale deren Intensität, bei der Bereiche der Schale untereinander in Kontakt treten. Die dazugehörige Beulform ist in Abbildung 8.9 dargestellt. Während sich bei der rotationssymmetrischen Belastung eine Wulst ausbildet, verwölbt sich die Schale mit der unsymmetrischen Belastung nach Rotter im Bereich des Fließkanals nach innen. Sind die Ursachen der Schadensfälle in Kapitel 1 auch nicht bekannt, so zeigen sich dennoch ähnliche Formen im Vergleich der Verschiebungsfelder, die in den Abbildungen 1.3a und 8.9 dargestellt sind.

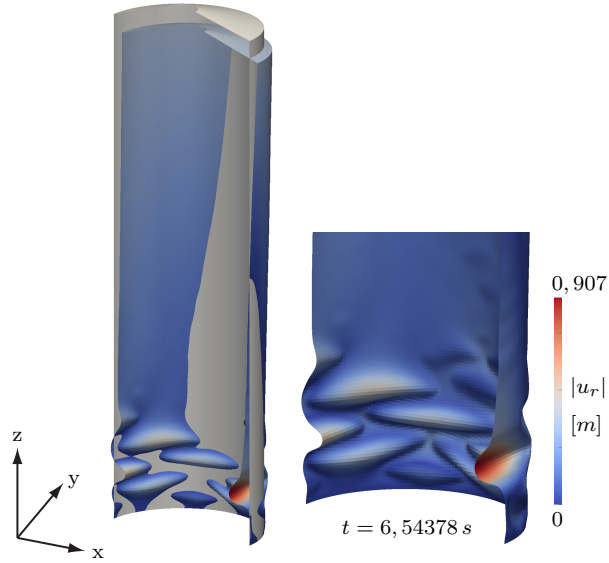


Abbildung 8.8: Schalenbeulen bei unsymmetrischer Belastung

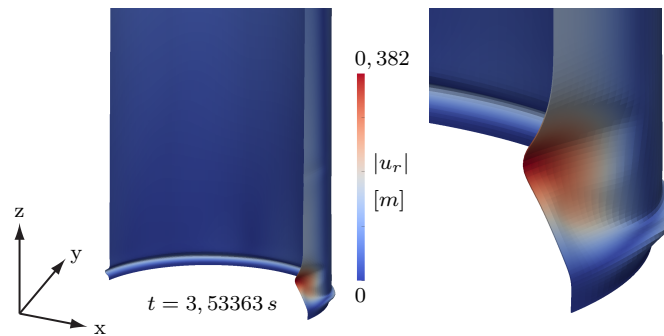


Abbildung 8.9: Elastoviskoplastizität - unsymmetrische Belastung

Die zeitliche Entwicklung der radialen Verschiebung in der Symmetrieebene der stählernen Kreiszyinderschale ist entlang des Fließkanals in Abbildung 8.10 dargestellt. Sie zeigt, dass sich der in Abbildung 8.9 dargestellte Verschiebungszustand im Wesentlichen innerhalb einer Zeit von $\Delta t \approx 0,387\text{ s}$ entwickelt. Ausgehend von einem beulenfreien Zustand bildet sich zunächst auf einer Höhe von 4 m eine Beule mit deutlicher radialer Verschiebung aus. Mit der radialen Verschiebung mit einem maximalen Wert von $|u_r| \approx 0,19\text{ m}$ zum Zeitpunkt $t = 3,4781\text{ s}$ bildet sich zeitgleich eine weitere Beule am Fußpunkt des Kreiszyinders aus, deren Intensität sich im Zeitbereich $3,4781\text{ s} \leq t \leq 3,5336\text{ s}$ wesentlich erhöht, während sich die anfängliche Wölbung der Schale auf einer Höhe von 4 m verringert. Sie ist zum Zeitpunkt $t = 3,5336\text{ s}$ in Abbildung 8.9 kaum noch zu erkennen.

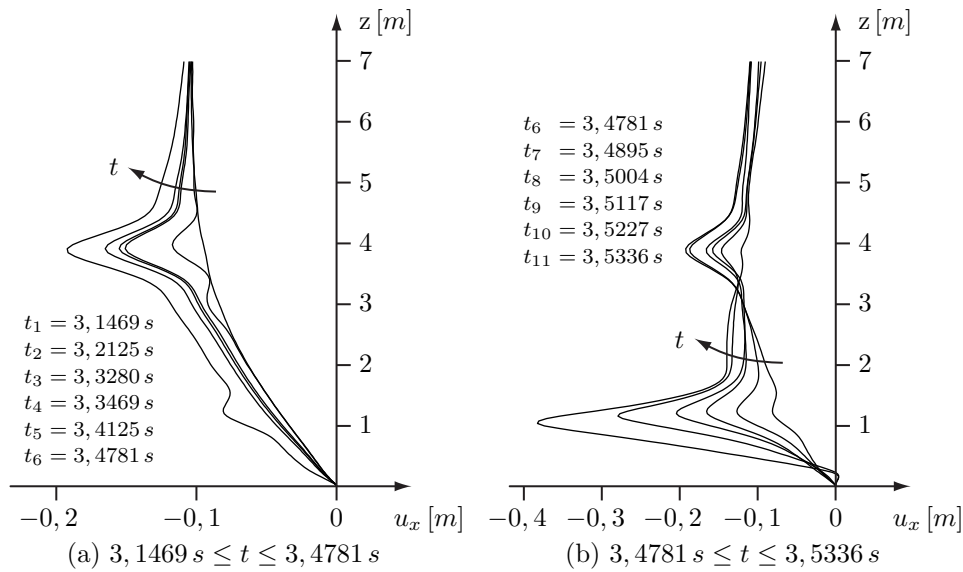


Abbildung 8.10: Verschiebungen in der Symmetrieebene
und entlang des Fließkanals

In Bezug auf die Auslegung von Silos zeigen die numerischen Analysen, dass die Stabilität von $0,0080 \text{ m}$ dicken stählernen Kreiszylinderschalen mit Strukturmodellen für elastisches Materialverhalten deutlich auf der unsicheren Seite liegend bewertet ist. Sie verringert sich bei einem geringeren Lastniveau deutlich, wenn das viskoplastische Materialverhalten von Stählen berücksichtigt ist. Den Analysen folgend ist das im Gebrauchszustand eines Silos aufnehmbare Lastniveau im Fall zentrischer Entleerungen nur halb so hoch, wenn sich die Kreiszylinderschale plastisch verformt. Auch bei unsymmetrischer Beanspruchung infolge exzentrischer Entleerungen reduziert sich das Lastniveau um mehr als 30%, so dass in beiden Fällen der Einfluss des viskoplastischen Materialverhaltens wesentlich ist. Weiterhin beeinflusst das viskoplastische Materialverhalten auch die Form von Beulen, infolge deren sich die Steifigkeit von Silotragwerken signifikant reduziert. Ist die Beulform im Bezug auf eine veränderte Strömung eines Schüttgutes während einer Entleerung von besonderem Interesse, ist die Masseträgheit der Schale zu berücksichtigen, die deren Entwicklung mit bestimmt.

8.3 Beanspruchungen von Siloschalen

Ausgehend von zeitlich konstanten Spannungszuständen in Silos während der Lagerung von Schüttgütern sind darauf aufbauend die zeitveränderlichen Beanspruchungen von Siloschalen während der Entnahme von Schüttgütern numerisch analysiert.

8.3.1 Ruhende Schüttgüter

Zuerst sind die Beanspruchungen von Siloschalen für ruhende Schüttgüter numerisch analysiert. Dabei ist zwischen im Grundriss symmetrischen und unsymmetrischen Füllzuständen unterschieden.

Symmetrische Füllzustände

Der Einfluss der Nachgiebigkeiten von zylindrischen Siloschalen auf deren Beanspruchungen infolge des Eigengewichts des jeweiligen Schüttgutes ist mit Modellen der Strukturmechanik für St.Venant-Kirchhoff-Materiale untersucht. Dazu sind die Dicken der Siloschalen mit einem inneren Radius von $r_i = 1\text{ m}$ im Bereich $0,002\text{ m} \leq t_s \leq 0,1\text{ m}$ variiert und die Querdehnzahlen der Schüttgüter von $\nu = 0,2$ bis auf $\nu = 0,4$ gesteigert. Sind die Querdehnzahlen auch unterschiedlich, eint alle Schüttgüter ein Kompressionsmodul von $K = 5 \cdot 10^7\text{ N/m}^2$ und eine Wichte von $\gamma = 15.696\text{ N/m}^3$. Die Schüttgüter befüllen die Silos über eine Höhe von 12 m . Die Wichten der Siloschalen sind vernachlässigt, so dass sie sich im Wesentlichen infolge der Querdehnungen der Schüttgüter verformen. Die maximale Durchdringungslänge von $l_n = 5 \cdot 10^{-4}\text{ m}$ stellt zusammen mit einem Bettungsmodul von $k_{bn} = 5 \cdot 10^7\text{ N/m}^3$ sicher, dass die Schüttgüter nahezu vollständig druckbeansprucht sind. Deren Abgleiten entlang der Siloschalen ist neben dem Bettungsmodul $k_{bt} = 2,1 \cdot 10^{11}\text{ N/m}^3$ von der Viskosität $d = 100\text{ N s/m}^2$ und dem Spannungsponenten $n = 1$ beeinflusst, so dass quasi-stationäre Lösungen bei der Belastungsgeschwindigkeit

$$\dot{\gamma} = \gamma \begin{cases} \frac{1}{2T} \sin\left(\frac{t}{T}\right) & \text{mit } T = \frac{2}{\pi} s \quad \text{für } 0 s < t < 2 s \\ 0 s^{-1} & \text{für } t \geq 2 s \end{cases} \quad (8.15)$$

nach $t < 2,3\text{ s}$ gegeben sind.

Die Beanspruchungen von Schalen befüllter Silos sind mit der Horizontallast in Abbildung 8.11 dargestellt. Die Verläufe der Horizontallast zeigen, dass sich deren Intensität lediglich um 10 - 15% verringert, wenn der Einfluss der Nachgiebigkeiten einer $t_s = 0,002\text{ m}$ dicken Schale berücksichtigt ist. Von größerer Bedeutung ist das mechanische Verhalten des Schüttgutes. Ist die Kinematik mit dem Greenschen Verzerrungstensor definiert und ist das Materialverhalten mit dem Potential eines St.Venant-Kirchhoff-Materials beschrieben, weichen die Verläufe der Horizontallast wesentlich von den Verläufen der Horizontallast nach Janssen ab. Ist der Grenzwert der jeweiligen Horizontallast bei starren Schalen auch identisch, nimmt sie langsamer zu, wenn das mechanische Verhalten des Schüttgutes dem eines St.Venant-Kirchhoff-Materials entspricht. Wenn auch mit dem Kräftegleichgewicht nach Gleichung (8.2) das Materialverhalten eines Schüttgutes allein mit dem Horizontallastverhältnis formuliert ist, liegen die erhöhten Werte der Horizontallast nach Janssen in Bezug auf Nachweise der Tragfähigkeit von Siloschalen ungeachtet dessen auf der sicheren

Seite. Der Zusammenhang zwischen der Querdehnnzahl eines St.Venant-Kirchhoff-Materials und dem Horizontallastverhältnis nach Gleichung (8.4) ist mit

$$K = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (8.16)$$

gegeben. Entsprechend dem Kräftegleichgewicht nach Janssen ist Gleichung (8.16) mit der Annahme einer starren Siloschale hergeleitet.

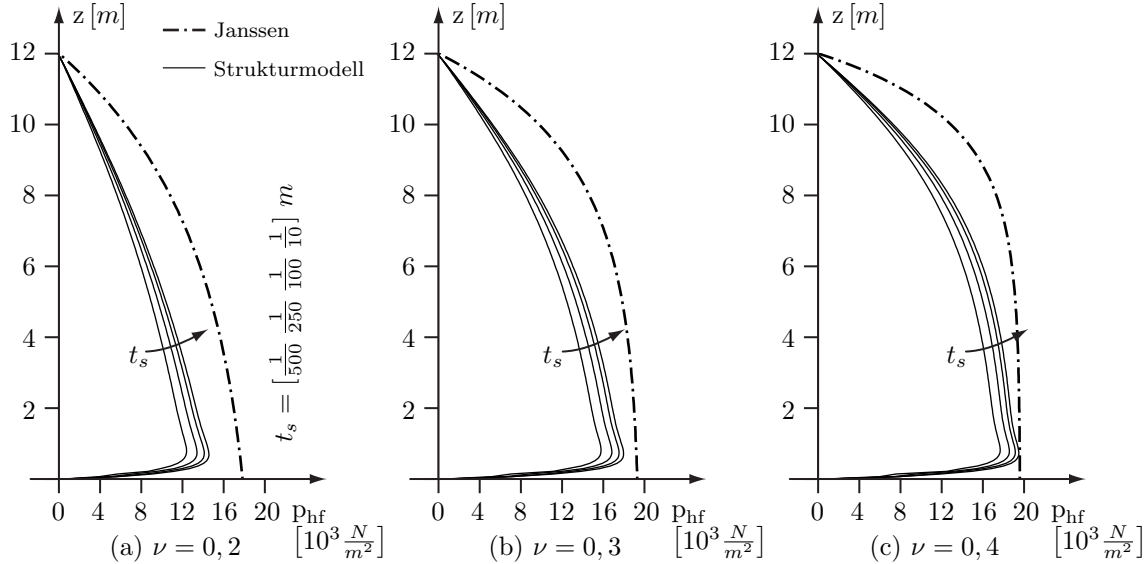


Abbildung 8.11: Horizontallast in Abhängigkeit der Querdehnnzahl und Schalendicke

Unsymmetrische Füllzustände

Der Spannungszustand in einem Silo mit einem einseitig, entlang der Siloschale verlaufenden Fließkanal ist in dessen Querschnittsebene für ein Schüttgut mit einem Kompressions- und Schubmodul von $K_1 = 5 \cdot 10^7 N/m^2$ beziehungsweise $G_1 \approx 2,31 \cdot 10^7 N/m^2$ ($\nu_1 = 0,3$) untersucht. Während sich die Siloschale elastisch verformt, verformt sich das Schüttgut mit einem Schüttwinkel von $\phi_i = 40^\circ$ ($a_v \approx 0,28$) zudem plastisch. Es bildet die tote Zone und formt den Fließkanal mit einem Radius von $r_c = 1,2 m$ in einem Abstand von $e_c = 3 m$ zu der Symmetrieachse der Siloschale (siehe Abbildung 8.3). Der Spannungszustand ist für ein $0,3 m$ dickes Segment einer Siloscheibe ausgewertet, deren Schüttgut über den gesamten Querschnitt weggesteuert mit der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\dot{\epsilon}_{33} = 0,1 \frac{1}{s} \begin{cases} 3 \frac{t^2}{(0,5 s)^2} - 2 \frac{t^3}{(0,5 s)^3} & \text{für } t < 0,5 s \\ 1 - 3 \frac{(t-0,5 s)^2}{(0,5 s)^2} + 2 \frac{(t-0,5 s)^3}{(0,5 s)^3} & \text{für } 0,5 s \leq t < 1 s \\ 0 & \text{für } t > 1 s \end{cases} \quad (8.17)$$

bis auf eine maximale Verzerrung von $\epsilon_{33} = 0,05$ verdichtet ist.

In Bezug auf die maximale Verzerrung ist die Fließspannung des Schüttgutes mit einem Wert von $\sigma_y = 10^3 \text{ N/m}^2$ derart klein, dass es auch mit der Verformung der Siloschale nahezu vollständig beansprucht ist. Der Übergang von einem symmetrisch befüllten Silo bis hin zu einem Silo mit im Grundriss außermittig verlaufenden Fließkanal ist mit dessen Befüllung gegeben. Die Beanspruchung der Siloschale ist für einen Fließkanal untersucht, der mit Schüttgütern unterschiedlicher Steifigkeit befüllt ist. Es sind Schüttgüter verwendet, deren Kompressions- und Schubmodule in gleicher Relation zueinander stehen wie die Module des Schüttgutes innerhalb der toten Zone. Wenn auch die Fließspannungen der Schüttgüter identisch sind, können die Schüttgüter im Fließkanal bei gleichem Druck unter steigenden deviatorischen Spannungen infolge ihrer reduzierten Schüttwinkel von $\phi_i = 20^\circ$ ($a_v \approx 0,12$) bereits zu fließen beginnen, während sich das Schüttgut innerhalb der toten Zone noch reversibel aufeinander abstützt. Dabei sind mit den Parametern $\beta = 0,1$ und $a_\Psi = 0$ die Volumen der Schüttgüter im Zustand des Fließens nahezu erhalten (vergleiche Abbildung 2.6).

Die Siloschale ist ihrer Höhe nach unverschieblich gelagert, so dass die Schüttgüter mit ihrer Verdichtung in Abhängigkeit der Parameter $d = 100 \text{ Ns/m}^2$, $n = 1$ und $k_{b_i} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^3$ an ihr ableiten. Die Siloschale ist in horizontaler Richtung nur senkrecht zu ihrer Symmetrieebene gelagert. Entlang ihrer inneren Oberfläche steht sie mit der Oberflächenspannung und den kinematischen Beziehungen in Wechselwirkung mit den Schüttgütern, die in der Symmetrieachse des Silos gelagert sind (siehe Abbildung 4.2).

In einem ersten Schritt ist die Dicke der Siloschale mit einem derart hohen Wert beschrieben, dass sie sich nahezu ausschließlich als Starrkörper bewegt. Die Intensitäten und die Verläufe sind für die in Abbildung 8.12 dargestellten Komponenten der Interaktionsspannung ausgewertet. Dabei ist zunächst der Fließkanal mit einem Schüttgut befüllt, dessen Steifigkeiten im Vergleich mit den Steifigkeiten des Schüttgutes innerhalb der toten Zone um das 0,1-fache geringer sind. Die Verläufe zeigen, dass der Wert der Horizontallast mit der Nähe zum Fließkanal nichtlinear ansteigt und in dessen Bereich deutlich reduziert ist. Mit der reduzierten Horizontallast im Bereich des Fließkanals ist auch die Schubspannung geringer.

In Abbildung 8.13 sind Verläufe der Horizontallast für unterschiedliche Steifigkeitsverhältnisse zwischen den Schüttgütern dargestellt. Sie sind auf den Wert der Horizontallast eines einheitlich befüllten Silos normiert, so dass die Siloschale in Bereichen mit Werten größer eins erhöht beansprucht ist. Der Vergleich der Verläufe zeigt, dass der Wert der Horizontallast im Bereich des Fließkanals mit dessen Werten der Steifigkeiten abnimmt. Im gegenüberliegenden Bereich verringert sich der Wert hingegen weitaus geringer, so dass die statische Gleichgewichtslage erhöhte Werte der Horizontallast im Randbereich der toten Zone bedingt.

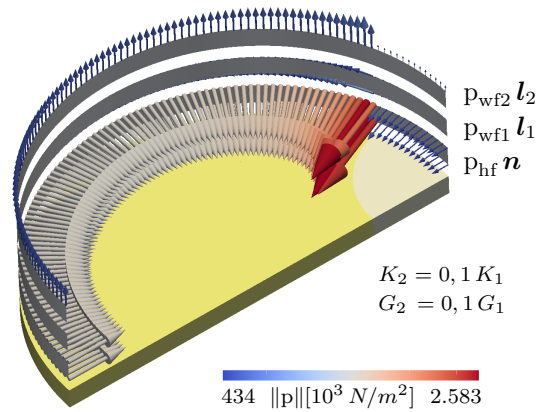


Abbildung 8.12: Strukturmodell

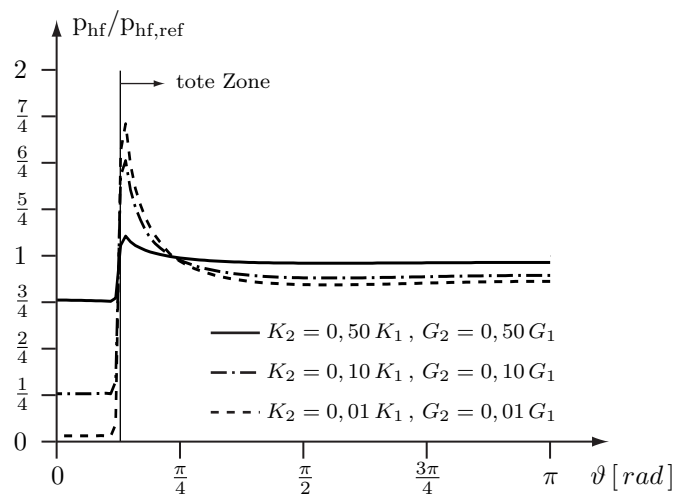
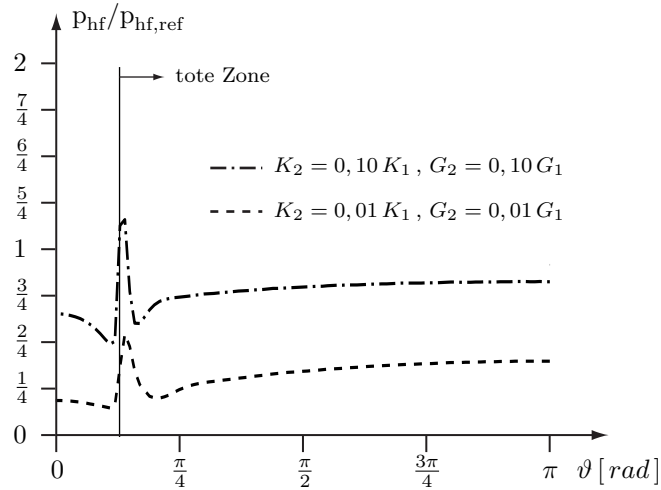


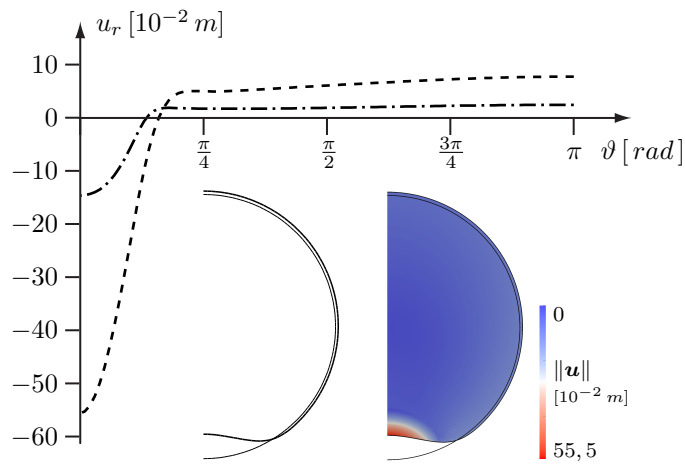
Abbildung 8.13: Normierte Horizontallast

Deutlich unterschiedlich ist der Verlauf und die Intensität der Horizontallast, wenn die Nachgiebigkeit einer Siloschale berücksichtigt ist. Während sich die Intensität der Horizontallast innerhalb der toten Zone fernab des Fließkanals in Abhängigkeit dessen Steifigkeiten im Fall einer starren Siloschale nur unwesentlich verändert, reduziert sie sich signifikant, wenn die Nachgiebigkeit einer $t_s = 0,012 \text{ m}$ dicken Siloschale berücksichtigt ist (siehe Abbildung 8.14a). Dabei ist der Wert der Horizontallast umso geringer, je geringer die Werte der Steifigkeiten des Fließkanals sind. Dieser Effekt ist mit der radialen Verschiebung der dünnwandigen Siloschale im Bereich der toten Zone erklärt (siehe Abbildung 8.14b).

Mit der radialen Verschiebung ist eine Aufweitung des Kreisquerschnittes verbunden, so dass sich die Werte der Horizontallast infolge der begrenzten Querdehnungen der Schüttgüter im Vergleich mit den Werten bei starrer Siloschale verringern. Zugleich verformt sich die nachgiebige Siloschale aufgrund der erhöhten Werte der Horizontallast im Randbereich der toten Zone und der deutlich reduzierten Stützwirkung entlang des Fließkanals nach innen. So ist festzuhalten, dass sich eine Siloschale biegeverformt und sich die Intensität ihrer Ringspannung verringert, wenn sich mit einer Entleerung ein im Grundriss exzentrisch verlaufender Fließkanal ausbildet.



(a) Normierte Horizontallast



(b) Radiale Verschiebung der Schale

Abbildung 8.14: Einfluss nachgiebiger Lagerung

In Bezug auf die Stabilität einer Siloschale ist damit die Ausbildung von Beulen begünstigt und deren Steifigkeiten gemindert. Im Vergleich mit dem Strukturmodell sind mit dem Lastmodell nach Rotter wesentlich größere Werte für die Horizontallast bei einem außermittig verlaufenden Fließkanal berechnet. Dies lässt erwarten, dass mit der Anwendung des Eurocode 1 Teil 4 eine dünnwandige Siloschale im Fall exzentrischer Entleerungen nicht effizient dimensioniert ist, wenn die Masseträgheit des abgezogenen Schüttgutes vernachlässigt werden kann. Den numerischen Analysen folgend hat ein Lastmodell, das die Beanspruchung in einem Silo während einer exzentrischen Entleerung realitätsnah abbildet, die Steifigkeiten der dünnwandigen Siloschale als wesentliche Parameter zu berücksichtigen.

8.3.2 Strömende Schüttgüter

Mit dem Ziel eines besseren Verständnisses für die Beanspruchungen von Siloschalen während Entleerungen sind zunächst zentrische Entleerungen untersucht bevor die exzentrische Entleerung eines Silos näher numerisch analysiert wird.

Zentrische Entleerungen

Die Ausbildung einer toten Zone und deren Einfluss auf die Beanspruchung einer Siloschale ist für Schüttgüter mit einer Fließspannung von $\sigma_y = 10^4 \text{ N/m}^2$ und $\sigma_y = 10^3 \text{ N/m}^2$ numerisch analysiert. Während die Fließspannungen der Schüttgüter variieren, ist beiden Schüttgütern ein Schüttwinkel von $\phi_i = 40^\circ$ ($a_v \approx 0,28$), ein Kompressionsmodul von $K = 5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ und eine Querdehnzahl von $\nu = 0,3$ gemein. Mit den Parametern $\beta = 0,03$ und $a_\psi = 0$ ist bei hydrostatischem Druck volumenkonstantes Fließen unterstellt (vergleiche Abbildung 2.6). Die Viskosität $d = 10^3 \text{ Ns/m}^2$ ist bei einem Spannungsexponenten $n = 1$ mit einem derart kleinen Wert beschrieben, dass sich die Schüttgüter infolge der konstanten Belastungsgeschwindigkeit von $\dot{\gamma} = 1,275 \cdot 10^3 \text{ N/s m}^3$ mit nahezu elastisch-plastischen Verzerungen bewegen. Die maximale Durchdringungslänge $l_n = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ stellt zusammen mit dem Bettungsmodul $k_{b_n} = 6 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$ sicher, dass sich die Schüttgüter leicht von der Siloschale ablösen können. Deren Abgleiten entlang der Siloschale ist in Abhängigkeit der Parameter $d = 10^3 \text{ Ns/m}^2$, $n = 1$ und $k_{b_t} = 6 \cdot 10^9 \text{ N/m}^3$ bestimmt. Die Ausbildung einer toten Zone ist im Wesentlichen von den Eigenschaften des jeweiligen Schüttgutes und der Wandreibung beeinflusst, so dass die Siloschale als starr angenommen ist.

Die Beanspruchung in einem Schüttgut mit einer Fließspannung von $\sigma_y = 10^4 \text{ N/m}^2$ ist mit der Vergleichsspannung bei einer Wichte von $\gamma = 12,75 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$ in Abbildung 8.15b dargestellt. Die Umlagerung der Beanspruchung infolge des plastischen Materialverhaltens ist in Bezug auf die Vergleichsspannung in einem St.Venant-Kirchhoff-Material bewertet, die Abbildung 8.15a zeigt. Der Vergleich der Spannungsverläufe zeigt, dass sich die Beanspruchung mit der Ausbildung einer toten Zone im Wesentlichen in der Nähe der Auslauföffnung umlagert. Ist das Schüttgut als St.Venant-Kirchhoff-Material beschrieben, stützt es sich mit einem Druckgewölbe auf dem Rand der Auslauföffnung ab. Das erklärt zusammen mit dem sprunghaften Übergang zwischen dem freien und dem gelagerten Bereich entlang des Randes den hohen Wert der Vergleichsspannung. Ist neben dem elastischen auch das plastische Materialverhalten berücksichtigt, gleitet das Schüttgut innerhalb eines Fließkanals geringer Höhe entlang der toten Zone ab, so dass sich das Druckgewölbe weiter entfernt von der Auslauföffnung ausbildet. Sind die Werte der Vergleichsspannungen in den Abbildungen 8.15a und 8.15b im Bereich der Auslauföffnung auch verschieden, deutet bereits der Verlauf der Vergleichsspannung in einem St.Venant-Kirchhoff-Material auf die Form der toten Zone hin, wenn er mit einer modifizierten Farbskala dargestellt ist.

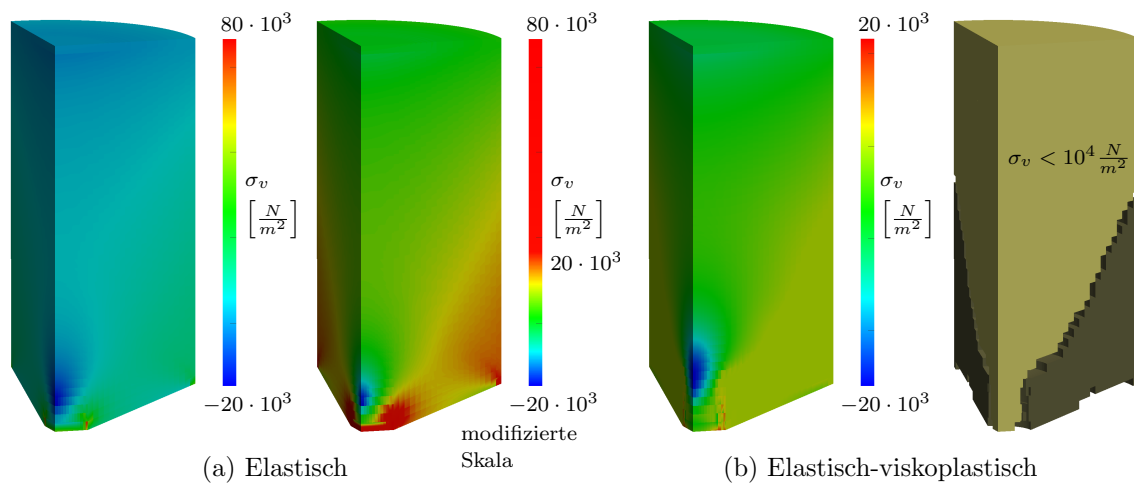


Abbildung 8.15: Vergleichsspannung in Abhängigkeit des Materialverhaltens

Die Form der toten Zone ist ersichtlich, wenn Bereiche mit einer Vergleichsspannung $\sigma_v < \sigma_y$ und $\sigma_v > \sigma_y$ getrennt voneinander farblich einheitlich dargestellt sind. Mit Abbildung 8.15b sind nur Elemente farblich dargestellt, deren materielle Punkte mit einer Vergleichsspannung beansprucht sind, die entweder unterhalb oder oberhalb der Fließspannung liegt, so dass der Phasenübergang zwischen ruhendem und strömendem Schüttgut innerhalb des farblich nicht markierten Gebietes erfolgt. Den Teilgebieten entsprechend ist neben einem Fließkanal geringer Höhe die Form der toten Zone im Bereich des zylindrischen Schafts im Wesentlichen vom Schüttkegel eines frei gelagerten Schüttgutes bestimmt.

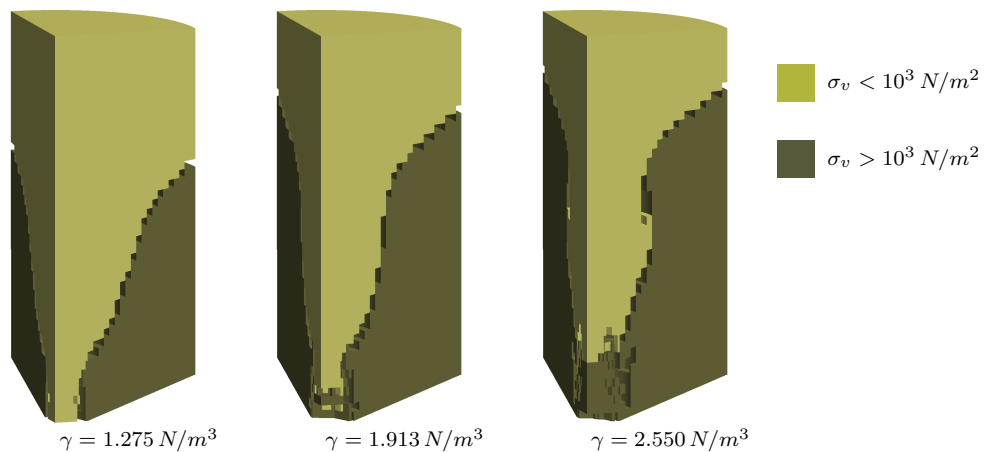


Abbildung 8.16: Form der toten Zone in Abhängigkeit der Schüttgutwichte

Für ein Schüttgut mit einer Fließspannung von $\sigma_y = 10^3 \text{ N/m}^2$ ist in Abbildung 8.16 gezeigt, dass die Form der toten Zone auch von dessen Wichte beeinflusst ist. Während bei einer Wichte von $\gamma = 1,275 \text{ N/m}^3$ ein Fließkanal nur in unmittelbarer Nähe der Auslauföffnung von ruhendem Schüttgut geformt wird, entwickelt er sich mit steigender Wichte in einen erweiterten Fließkanal mit veränderlichem Radius.

Mit der Erweiterung des Fließkanals vergrößert sich der Bereich der toten Zone, so dass sich deren Neigung entlang der Siloschale infolge einer zunehmend geringeren Auflast verringert.

Der Einfluss einer toten Zone auf die Beanspruchung einer Siloschale ist mit Druckverläufen in Abbildung 8.17 dargestellt. Der asymptotisch gegen unendlich strebende Wert des Drucks an der Auslauföffnung ist bei elastischem Materialverhalten auch hier eine Folge des sprunghaften Übergangs zwischen freiem und gelagertem Bereich des Randes. Plastifiziert das Material, lagert sich die Beanspruchung im Bereich der Auslauföffnung um, so dass sich der Wert des Drucks deutlich reduziert.

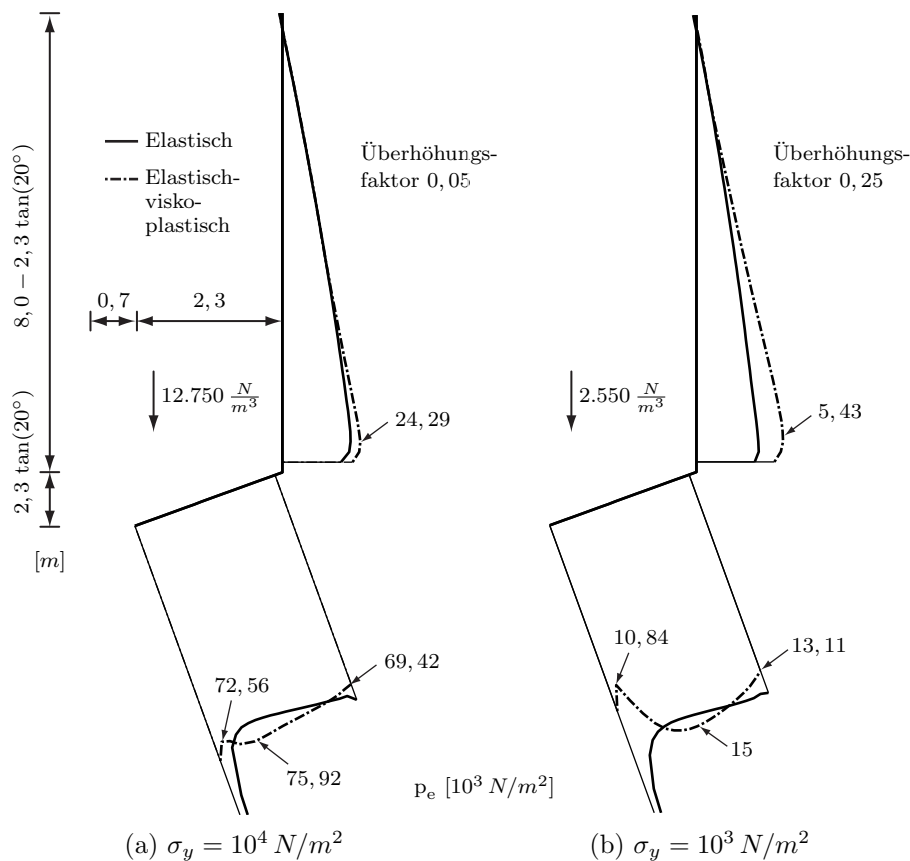


Abbildung 8.17: Druckverteilungen in Abhängigkeit der Fließspannung

Im Gegensatz zu den Verläufen der Horizontallast in Abbildung 8.11 entwickelt sich der Wert des Drucks im Bereich der toten Zone nahezu linear. Der Einfluss einer toten Zone auf den Verlauf des Drucks zeigt sich besonders deutlich, wenn sich die tote Zone nahezu vollständig über die gesamte Höhe des Silos erstreckt (siehe Abbildung 8.17b). Dem Strukturmodell folgend ist festzuhalten, dass eine Siloschale während einer zentrischen Entleerung stärker beansprucht wird, wenn sich eine tote Zone innerhalb eines Silos ausbildet.

Die Entwicklungen von freien Oberflächen und Beanspruchungen von zylindrischen Schalen während zentrischer Entleerungen sind zunächst für Flüssigkeiten nach Kapitel 8.1.2 und für starre Behälter in Abhängigkeit ihrer Rauigkeit diskutiert.

Ist die Wand eines Behälters glatt, senkt sich die Flüssigkeit mit der in Abbildung 8.18a dargestellten Entleerung gleichförmig ab. Erst wenn der Behälter fast vollständig entleert ist, bildet sich mit der erhöhten Strömungsgeschwindigkeit im Zentrum der Auslauföffnung ein Fließkanal geringen Radius aus. Senkt sich die Flüssigkeit bei einer glatten Wand gleichförmig ab, ist deren freie Oberfläche bei einer rauen Wand in der Nähe der Behälterschale infolge von Adhäsion leicht gekrümmt (siehe Abbildung 8.18b). In diesem Zusammenhang ist darauf hingewiesen, dass die Oberflächenspannung mit der Modellbildung nicht berücksichtigt ist, die die Krümmung einer freien Oberfläche mit beeinflusst. In Bezug auf die Abmessungen der untersuchten Flüssigkeitsbehälter ist der Einfluss der Oberflächenspannung jedoch von untergeordneter Bedeutung, so dass die Modellgleichungen nach Kapitel 2.2.2 die Bewegungen ihrer freien Oberflächen in guter Näherung beschreiben.

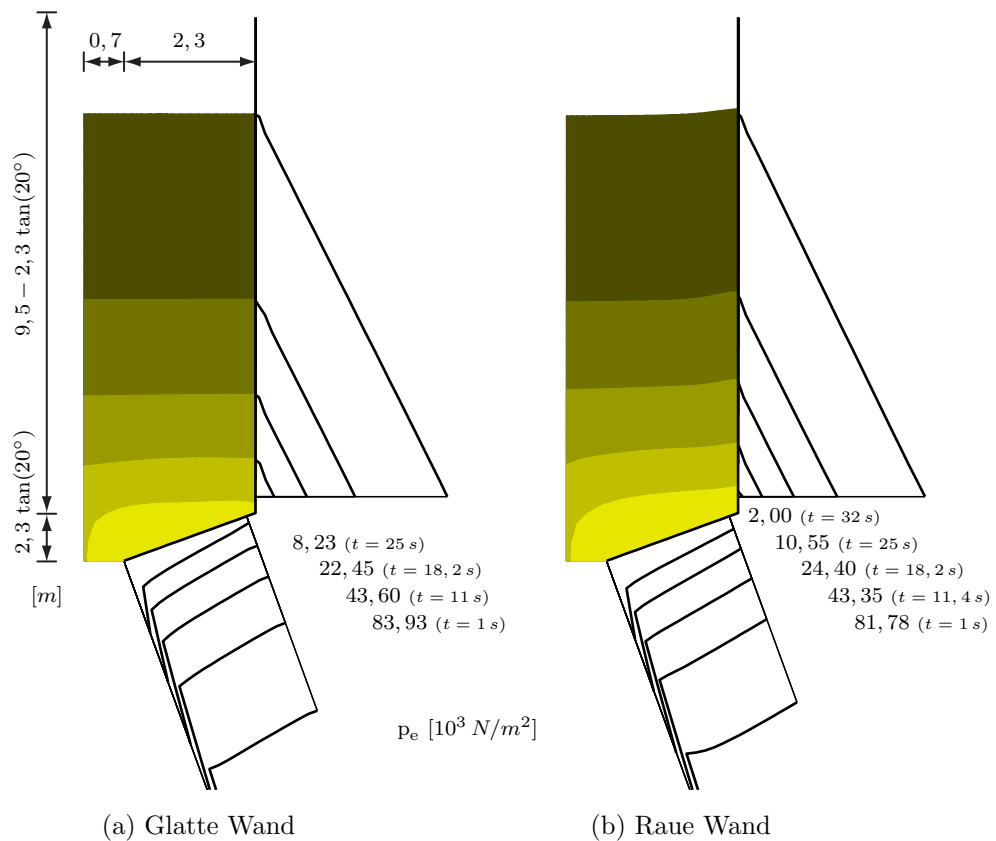


Abbildung 8.18: Druckverteilungen in Flüssigkeitsbehältern

Unabhängig von der Rauigkeit der Wand ändert sich der Druck, dem Pascal'schen Paradoxon folgend, nahezu linear über die Höhe der Behälter. Mit den in der Nähe des Übergangs zwischen zylindrischem Schaft und kegelförmigem Auslaufrichter angegebenen Werten des Drucks sind auch dessen Intensitäten nahezu identisch. Die deutlich erhöhten Werte des Drucks an den Auslauföffnungen sind physikalisch nicht weiter interpretiert. Sie sind eine Folge des abrupten Übergangs zwischen freiem und gelagertem Bereich des Randes, der bei einer ideal inkompressiblen Flüssigkeit zu singulären Stellen in den Verläufen ihrer Zustandsgrößen führt. So ist festzuhalten, dass die Wandreibung die Beanspruchung des Flüssigkeitsbehälters nur unwesentlich beeinflusst.

Deutlicher zeigt sich der Einfluss der Wandreibung, wenn Silos entleert werden, die mit Schüttgütern nach Kapitel 8.1.2 befüllt sind. Wie in Abbildung 8.19 dargestellt, verläuft der Druck im Fall einer rauen Wand derart nichtlinear, dass dessen maximaler Wert im zylindrischen Schaft zum Zeitpunkt $t = 1,05 \text{ s}$ im Vergleich mit dem Wert des Drucks bei einer glatten Wand um $\approx 23 \%$ geringer ist.

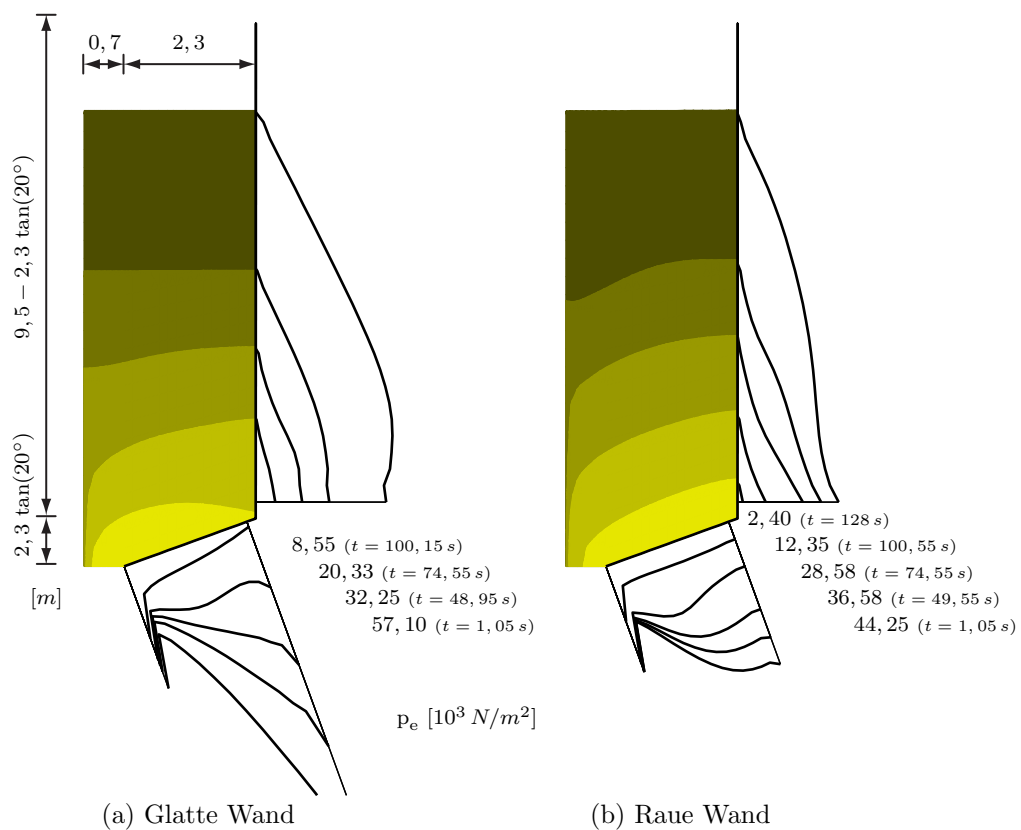


Abbildung 8.19: Druckverteilungen in Silos mit flachen Auslaufrichtern

Die Wirkung der Schubspannung zwischen Schüttgut und Siloschale reduziert zugleich die Intensität des Drucks auf den Auslaufrichter, der im Fall einer glatten Wand in der Nähe des zylindrischen Schafts erhöht beansprucht ist. Kann bei einer rauen Wand ein Teil der Wichte des Schüttgutes über den zylindrischen Schaft ab-

getragen werden, stützt sich das Schüttgut bei einer glatten Wand zu Beginn der Entleerung mit der Tragwirkung eines Gewölbes auf den Auslaufrichter ab. Erst wenn sich das Gewölbe mit der Absenkung der freien Oberfläche nicht mehr ausbilden kann, verringert sich der Wert des Drucks auf den Auslaufrichter signifikant. Der Einfluss der inneren Reibung des Schüttgutes zeigt sich neben der Druckbeanspruchung der Siloschale auch im Verlauf der freien Oberfläche. Bildet sich bei der Flüssigkeit ein Fließkanal erst zum Ende der Entleerung aus, senkt sich die freie Oberfläche des Schüttgutes bereits zu Beginn der Entleerung ungleichförmig ab, so dass sich ein Fließkanal schon ausbildet, wenn das Silo noch halb gefüllt ist.

Der Ausbildung eines Kernflusses kann entgegnet werden, wenn das Silo über einen steilen Auslaufrichter entleert wird (siehe Abbildung 8.20). So senkt sich das Schüttgut gleichförmiger ab (vergleiche Abbildung 8.19b mit 8.20b). Bei Entleerungen über steile Auslaufrichter ist der Effekt der Wandreibung weniger stark ausgeprägt, so dass die Formen der freien Oberflächen zu Beginn der Entleerungen weitgehend erhalten bleiben. Dass der Effekt hier weniger stark ausgeprägt ist, zeigt auch der Vergleich der Druckverläufe, die sich in Bezug auf Abbildung 8.19 geringer voneinander unterscheiden. Sind die Verläufe auch ähnlich, ist wie bei Silos mit flachem Auslaufrichter der Druck auf die Schale von geringerer Intensität, wenn eine Schubspannung infolge von Wandreibung übertragen wird.

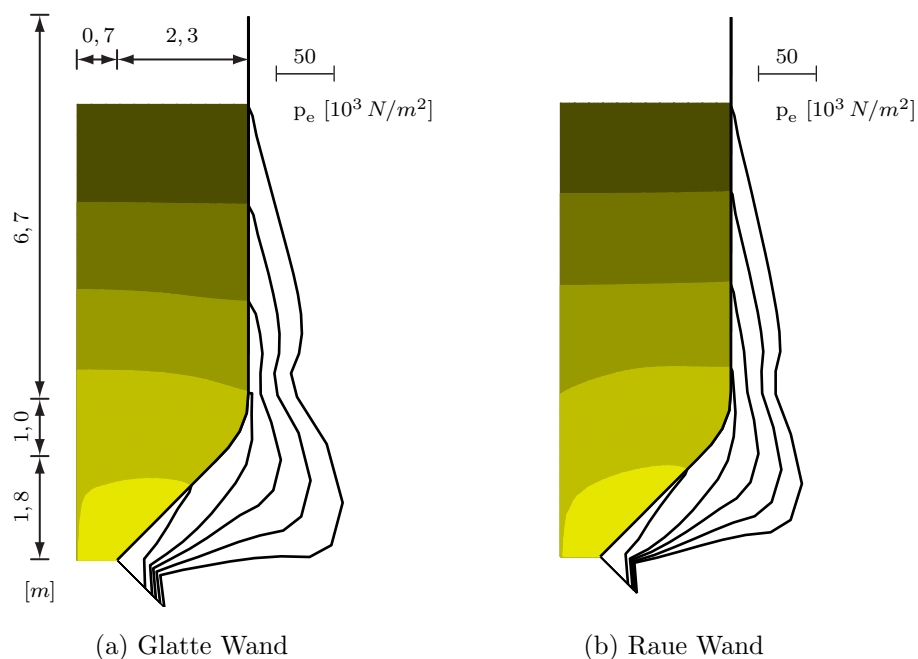


Abbildung 8.20: Druckverteilungen in Silos mit steilem Auslaufrichter

Der Einfluss des steilen Auslaufrichters auf den Strömungszustand im Schüttgut zeigt sich besonders deutlich bei einer glatten Wand (siehe Abbildung 8.20a). In diesem Fall nimmt infolge der kontinuierlichen Verjüngung des Querschnitts die Strömungsgeschwindigkeit mit der Nähe zur Siloschale im Übergangsbereich zwischen Schaft und Auslaufrichter zu. Damit senkt sich die freie Oberfläche zur Siloschale hin schneller ab, solange noch Schüttgut im zylindrischen Schaft des Silos vorhanden ist.

An dem Silo mit steilem Auslaufrichter sind nachfolgend der Einfluss der Kompressibilität des Schüttgutes und der Einfluss der Nachgiebigkeiten der Siloschale auf dessen Bewegungen untersucht. Die Bewegungen sind an den in Abbildung 8.21 markierten Punkten A , B und C ausgewertet. Die freie Oberfläche ist vom Punkt D verfolgt. Neben der initialen Lage der freien Oberfläche ist auch das Gebiet des Schüttgutes zum Ende der numerischen Analyse dargestellt. Auf eine vollständige Entleerung des Silos wird verzichtet, da sich innerhalb des Zeitbereichs $0\text{ s} \leq t \leq 100\text{ s}$ die Charakteristiken in den Bewegungen deutlich zeigen.

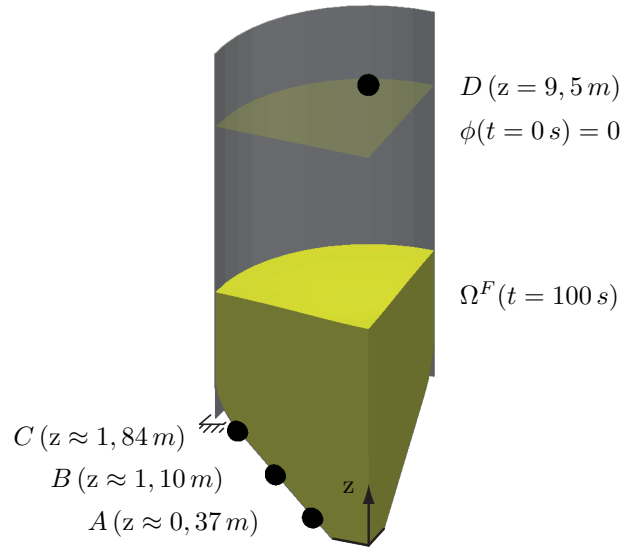


Abbildung 8.21: Teilentleertes Silo

Die Zeitverläufe ausgewählter Zustandsgrößen sind in Abbildung 8.22 dargestellt. Sind die Verläufe bei zunächst geschlossener Auslauföffnung mit Kriechbewegungen beschrieben, ändern sie sich deutlich erkennbar mit dem Beginn der Entleerung.

Der Verlauf der Abstandsfunktion zeigt, dass sich die freie Oberfläche mit einer nahezu konstanten Geschwindigkeit absenkt (siehe Abbildung 8.22a). Kompressionswellen, die sich bis zur freien Oberfläche entwickeln, prägen nicht den Verlauf der Abstandsfunktion. Dass die Ausbreitung von Kompressionswellen innerhalb des Schüttgutes deutlich gedämpft ist, lassen auch die Verläufe der Dichte erkennen (siehe Abbildung 8.22b). Ist die Phasenverschiebung zwischen den Schwingungen an den Punkten A und B noch ersichtlich, verringert sich der Wert der Dichte am Punkt C mit der im Zeitverlauf reduzierten Auflast nahezu linear. Auch die in Abbildung 8.22c dargestellten Verläufe des Geschwindigkeitsfeldes zeigen, dass die Kompressibilität des Schüttgutes dessen Bewegung hauptsächlich in der Nähe der Auslauföffnung beeinflusst. Während die Schwingung am Punkt A noch mit harmonischen Schwingungen höherer Frequenzen beschrieben ist, ist sie am Punkt C im Wesentlichen mit einer harmonischen Grundschwingung wiedergegeben.

Der Einfluss der Nachgiebigkeiten der Schale zeigt sich mit deren Verschiebungen an den Punkten A bis C (siehe Abbildung 8.22d). Sie sind mit der nahezu kontinuierlichen Entleerung vorrangig von der Wichte des Schüttgutes geprägt. Der Betrag der Verschiebung am Punkt A ist im Wesentlichen mit dessen Komponente in Richtung des zylindrischen Schaftes bestimmt. Der im Vergleich deutlich höhere Betrag der Verschiebung am Punkt C ist mit der Biegeverformung der Schale im Übergangsbereich zwischen Schaft und Auslaufrichter begründet.

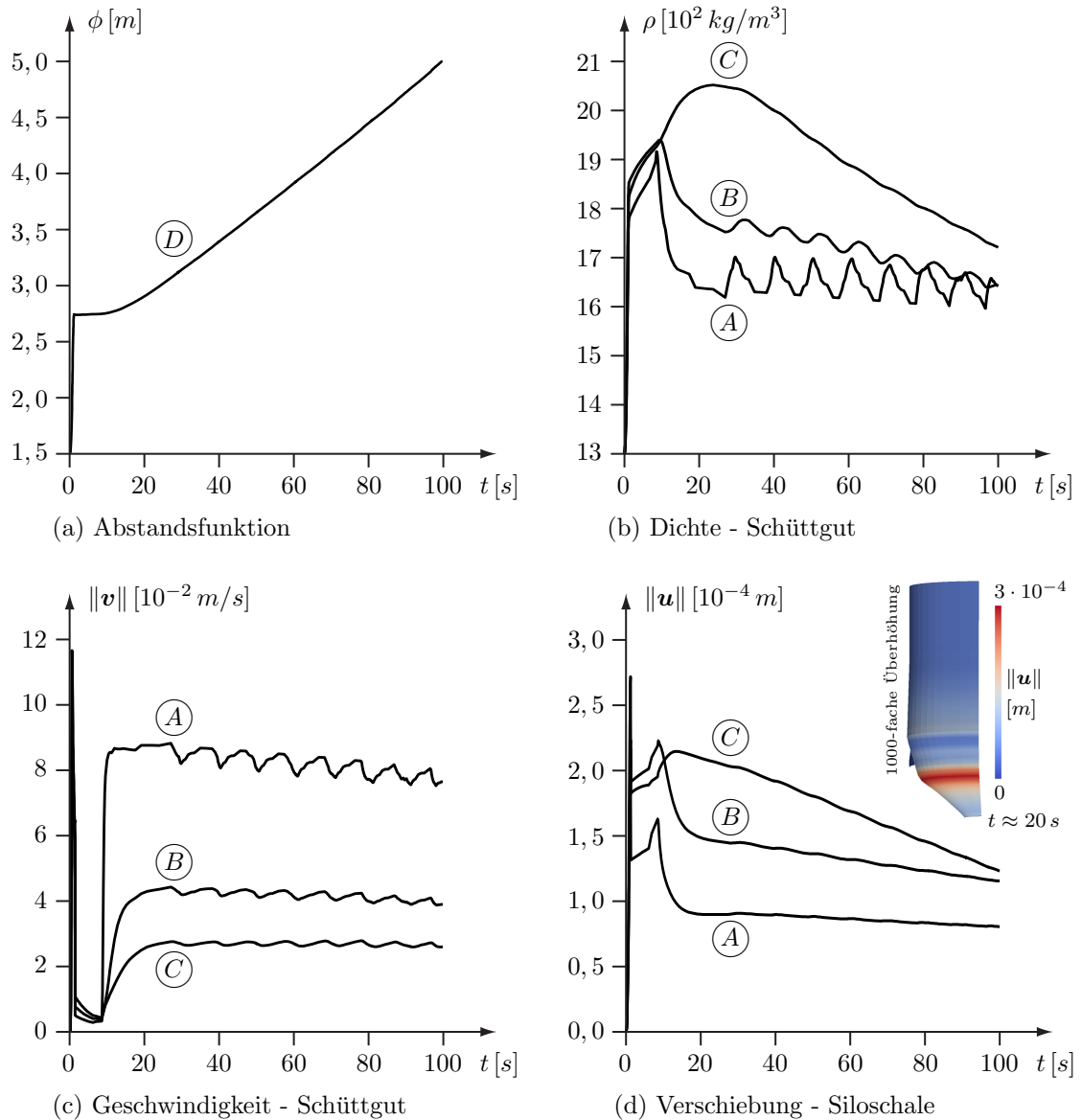


Abbildung 8.22: Zustandsgrößen im Zeitbereich

Exzentrische Entleerungen

Die Beanspruchungen von zylindrischen Schalen mit flachen Auslaufrichtern werden während exzentrischer Entleerungen für Flüssigkeiten und Schüttgüter nach Kapitel 8.1 dargestellt. Bevor der Einfluss der Nachgiebigkeiten von Schalen näher untersucht wird, ist für ein besseres Verständnis zuerst die Entwicklung der freien Oberfläche und der Verlauf der Horizontallast für starre Schalen numerisch analysiert.

Auch während exzentrischer Entleerung verändert sich der Druck nahezu linear über die Höhe des in Abbildung 8.23 dargestellten Flüssigkeitsbehälters. Der Druck ist mit der Bewegung der Flüssigkeit in Umfangsrichtung nur gering verschieden. Mit dem weitgehend linearen Druckverlauf im Raum und in der Zeit senkt sich die freie Oberfläche zu Beginn der Entleerung in der Mitte des Behälters gleichförmig ab (vergleiche Abbildung 8.18b). Erst wenn der Behälter so gut wie entleert ist, bildet sich die freie Oberfläche in Form eines Fließkanals aus.

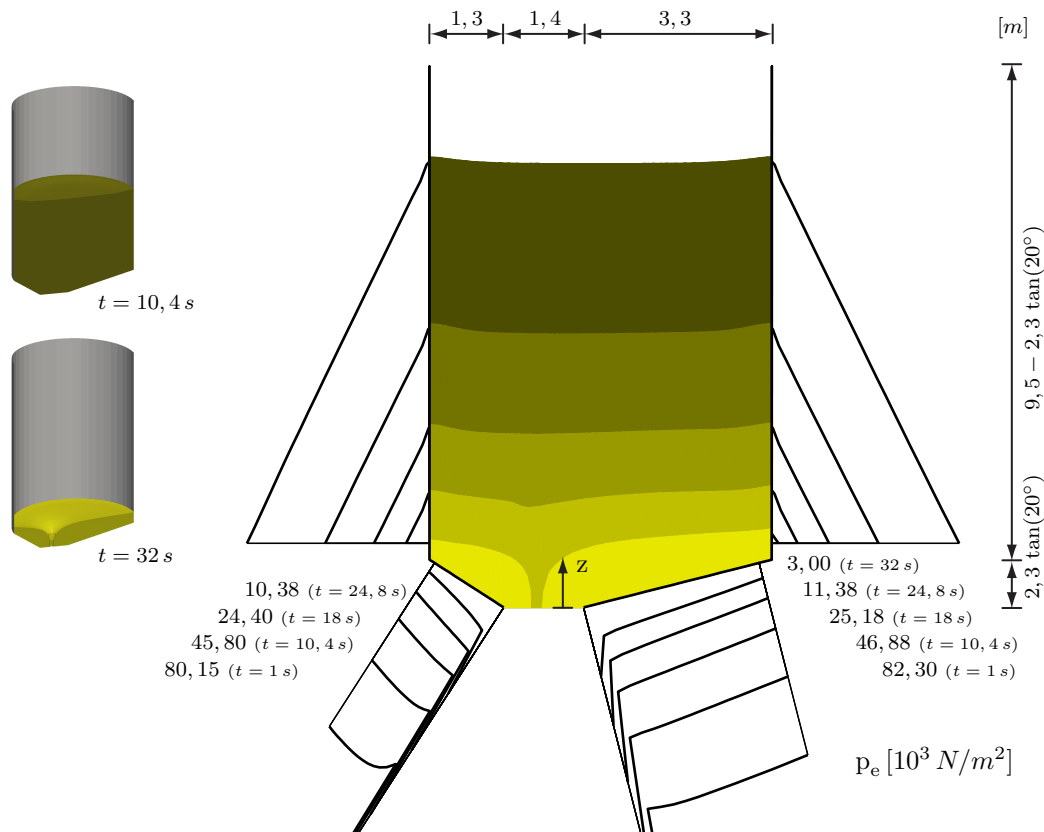


Abbildung 8.23: Flüssigkeitsbehälter - exzentrische Entleerung

Demgegenüber bildet sich in dem in Abbildung 8.24 dargestellten Silo bereits ein Fließkanal aus, während es noch halb befüllt ist. Die ungleichförmige Absenkung der freien Oberfläche zeigt, dass das Schüttgut mit zunehmender Neigung des Auslaufrichters schneller abfließt. Dieser Effekt ist vom inneren Reibwinkel des Schüttgutes

bestimmt, der nach Kapitel 8.1 kleiner oder gleich dem veränderlichen Neigungswinkel des Auslaufrichters ist. Damit bewegt sich das Schüttgut im Bereich geringerer Trichterneigung entschieden langsamer.

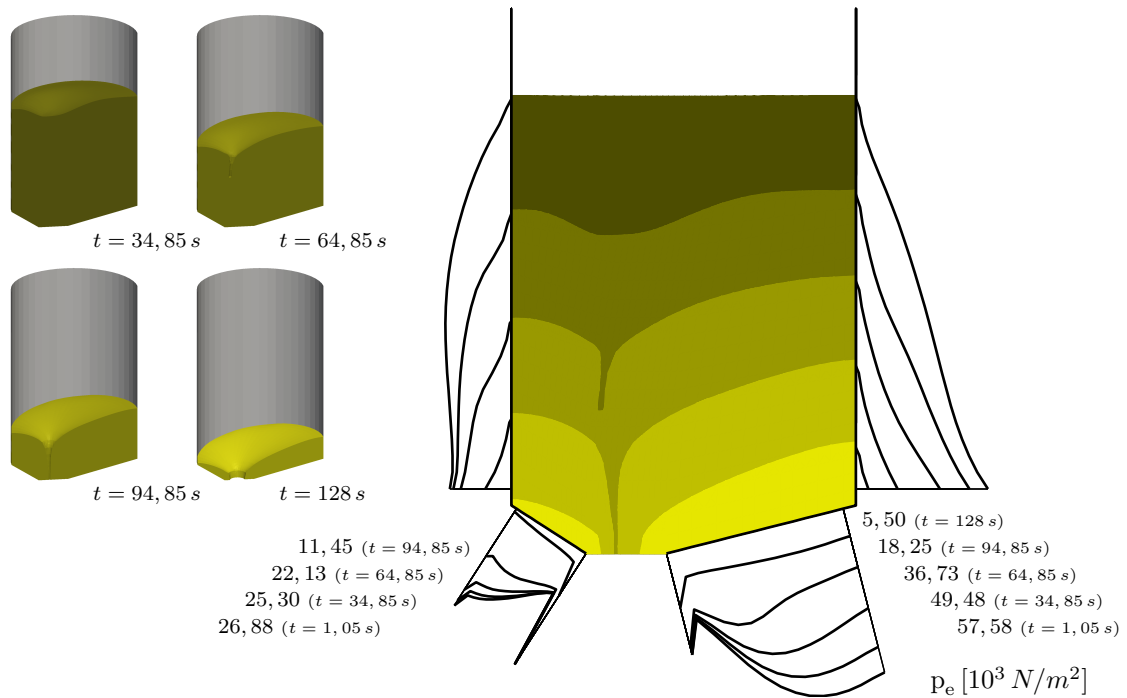


Abbildung 8.24: Silo - exzentrische Entleerung

Die ungleichförmige Absenkung der freien Oberfläche bedingt eine Strömung, mit der sich das Schüttgut in Umfangsrichtung hin zu der exzentrisch angeordneten Auslauföffnung bewegt. Aus diesem Grund nimmt die horizontale Komponente in der Fließrichtung entlang der Siloschale im Zeitverlauf so lange zu, bis sich das Schüttgut nur noch im Bereich des Auslaufrichters befindet (siehe Abbildung 8.25).

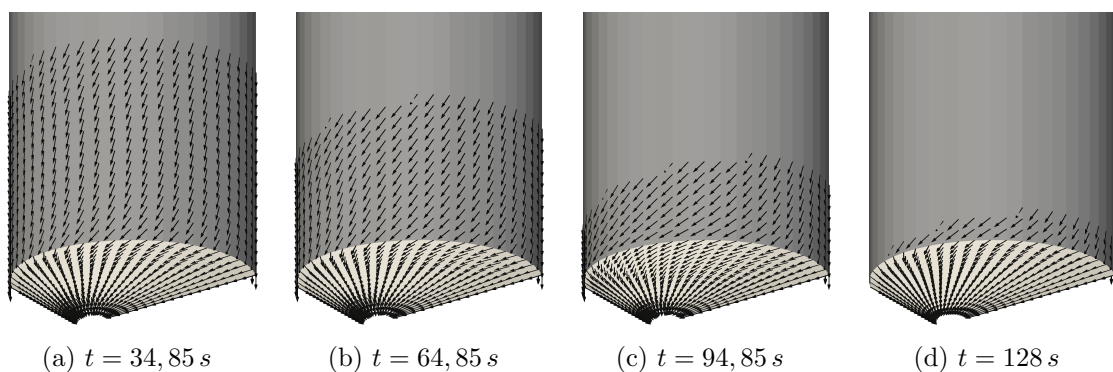


Abbildung 8.25: Fließrichtung im Zeitverlauf

Mit dem Hauptspannungszustand zum Zeitpunkt $t = 64,85 \text{ s}$ ist untersucht, ob sich der Fließkanal infolge einer Sogwirkung entwickelt. Der Hauptspannungszustand ist nach Gleichung (2.23) mit den Eigenwerten σ_i und Eigenvektoren ϕ_i des Spannungstensors definiert und mit Farbverläufen beziehungsweise Linien in Abbildung 8.26 dargestellt. Die Eigenwerte sind entsprechend ihrer Intensitäten so sortiert, dass mit der Hauptspannung σ_1 der größte Wert der Druckspannung beschrieben ist. Das dazugehörige Feld des Eigenvektors ϕ_1 zeigt, dass sich das Schüttgut oberhalb der Auslauföffnung mit der Form eines Gewölbes auf die Siloschale abstützt. Die Farbverläufe für um die Spannungsnullpunkte modifizierte Skalen zeigen deutlich, dass das Schüttgut im Bereich des sich ausbildenden Fließkanals druckbeansprucht ist. Damit kann eine Sogwirkung ausgeschlossen werden, die mit Hauptzugspannungen einhergeht. Hauptzugspannungen geringer Intensitäten wirken nur im Bereich der freien Auslauföffnung, so dass die Absenkung der freien Oberfläche und der Spannungszustand im Silo in guter Näherung mit den Modellgleichungen in Kapitel 2.2 beschrieben sind.

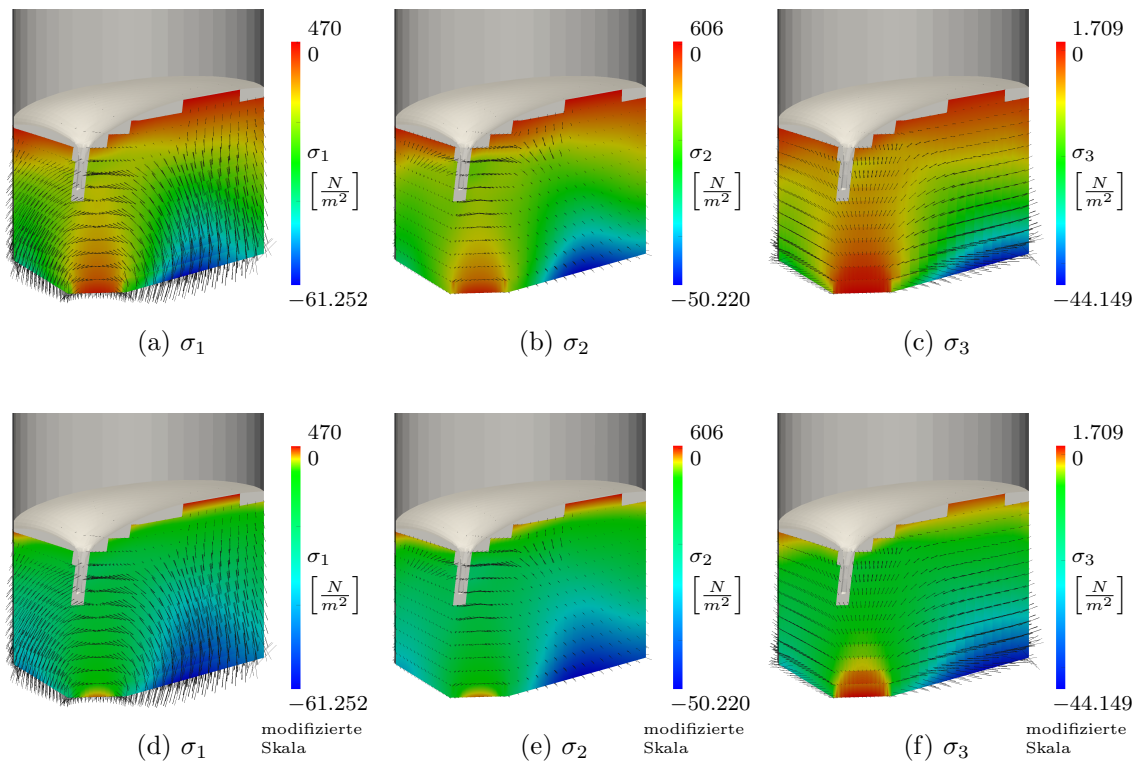


Abbildung 8.26: Hauptspannungen zum Zeitpunkt $t = 64,85 \text{ s}$

Neben der Form der freien Oberfläche sind auch die Intensität und der Verlauf der Horizontallast im Vergleich mit der Beanspruchung des Flüssigkeitsbehälters deutlich verschieden. So ist nicht nur die Intensität der Horizontallast mit einem Faktor kleiner 0,7 wesentlich geringer, auch entwickelt sich deren Verlauf deutlich nichtlinear. Während sich der Wert der Horizontallast im Bereich geringerer Trichterneigung weitgehend linear mit der Höhe verändert, ist er auf der gegenüberliegenden Seite

zu Beginn der Entleerung auf einer großen Fläche nahezu konstant (siehe Abbildung 8.24). Damit unterscheidet sich der Verlauf der Horizontallast in Bereichen wesentlich von dem Verlauf der Horizontallast nach Janssen, der mit Gleichung (8.5) beschrieben ist. Abbildung 8.27 stellt zu diskreten Zeitpunkten die Horizontallast in Umfangsrichtung auf unterschiedlichen Höhen dar, die farblich voneinander abgegrenzt sind. In Querschnitten betrachtet, zeigt sich, dass die resultierende Horizontallast infolge der Masseträgheit stets entgegengesetzt der Richtung wirkt, die, von der Rotationsachse des Schaftes ausgehend, mit der Lage der Auslauföffnung festgelegt ist.

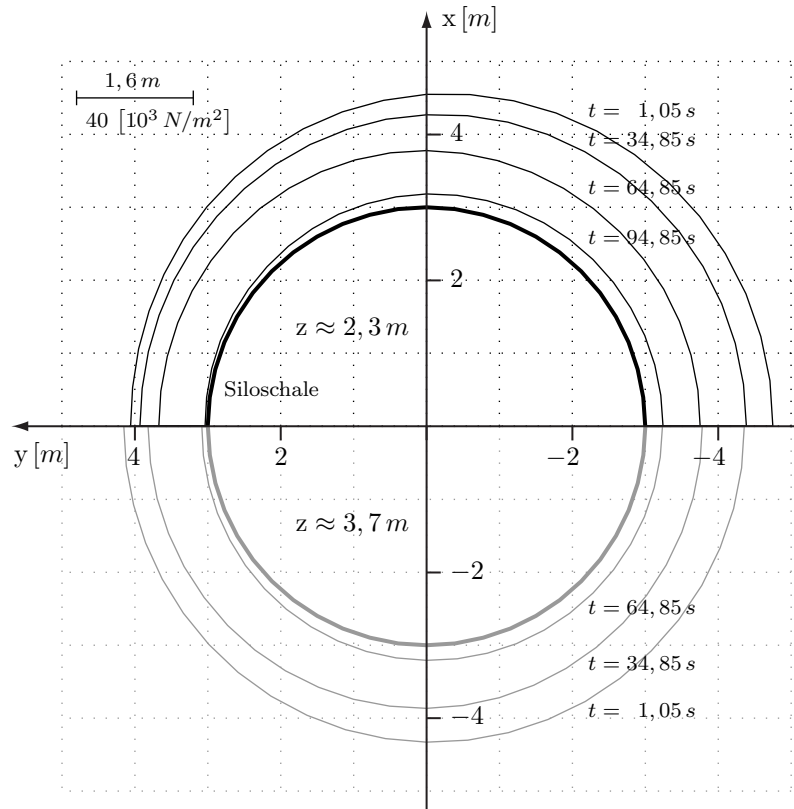


Abbildung 8.27: Druckverteilung in Umfangsrichtung

Die Beanspruchung und Verformung der Siloschale und deren Wechselwirkung mit dem Schüttgut sind zu Beginn der Entleerung untersucht. Die Nachgiebigkeiten des Silounterbaus sind mit einer elastischen Bettung modelliert, mit der die Siloschale in Richtung ihres zylindrischen Schaftes gelagert ist. Die elastische Bettung ist am Übergang zwischen dem Auslaufrichter und dem zylindrischen Schaft auf einer Breite entsprechend der Schalendicke formuliert, so dass sich die Siloschale infolge eines Bettungsmoduls von $k_b = 10^{11} \text{ N/m}^3$ auf Höhe ihres Aussteifungsringes ein wenig neigen kann.

Durch die in den Abbildungen 8.28a und 8.28b dargestellten Komponenten der Interaktionsspannung ist hauptsächlich der flache Auslaufrichter der Siloschale verformt (siehe Abbildung 8.28c). Die in Bereichen zu der Gravitation entgegengesetzte

Richtung der Verformung ist eine Folge des erhöhten Wertes der Normalspannung im flacher geneigten Bereich des Auslaufrichters und kann mit dem Verformungsverhalten von Kreisringplatten begründet werden. Sie krümmen sich auch bei einer Querdehnzahl identisch null in Umfangsrichtung, wenn sie in radialer Richtung biegebeansprucht sind. Mit dem Verlauf der Vergleichsspannung ist die Siloschale an der Auslauföffnung besonders stark beansprucht (siehe Abbildung 8.28d). Die im Vergleich zum Auslaufrichter geringere Beanspruchung des zylindrischen Schafts ist auf die elastische Bettung und die im Grundriss moderate Ausmiete der Auslauföffnung zurückzuführen. Die Verläufe der Horizontallast in Abbildung 8.27 zeigen, dass deren rotationssymmetrische Anteile überwiegen. Aus diesem Grund ist der zylindrische Schaft im Wesentlichen mit Membranspannungen gleichmäßig beansprucht.

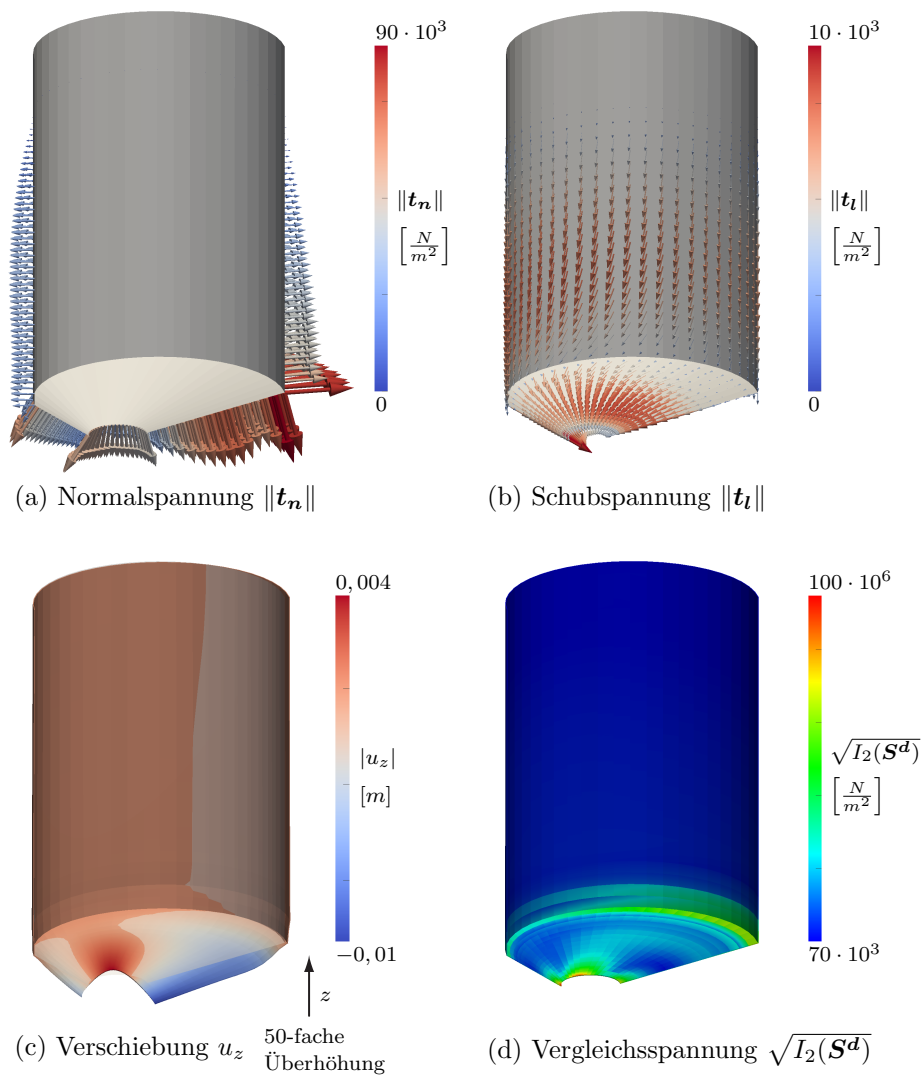


Abbildung 8.28: Beanspruchung der Siloschale zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$

Die ausgeprägte Wechselwirkung zwischen Schüttgut und Siloschale bedingt zu Beginn der Entleerung eine Zeitschrittweite von $\Delta t \approx 0,006 \text{ s}$. Die in Abbildung 8.30 dargestellten Verschiebungen des hervorgehobenen Punktes sind mit unterschiedlichen Zeitschrittweiten berechnet. Mit beiden Simulationen ist die Zeitschrittweite reduziert, wenn der Lösungsvektor innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens nicht gegen eine mögliche Lösung für die diskretisierten Modellgleichungen konvergiert. Während sich mit der Simulation B die Zeitschrittweite im

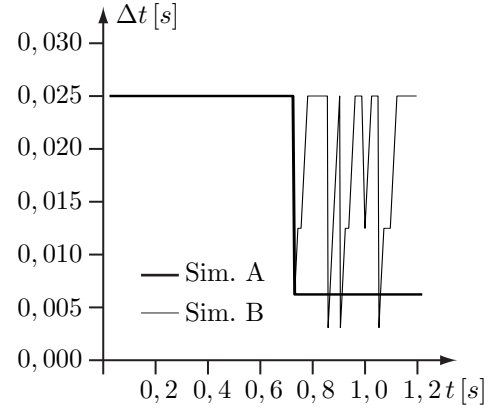


Abbildung 8.29: Zeitschrittweite

Zeitbereich wieder erhöhen kann, wenn ein gültiger Lösungsvektor in weniger als fünf Iterationsschritten berechnet ist, kann sich mit der Simulation A die Zeitschrittweite nur reduzieren (vergleiche Abbildung 8.29). Wesentlich ist, dass die Lösungsvektoren die diskretisierten Modellgleichungen erfüllen, auch wenn sich insbesondere die Verläufe der Verschiebung u_z^A mit Oszillationen darstellen. Während der Verschiebungsverlauf der Simulation B ab dem Zeitpunkt $t \approx 0,5 \text{ s}$ fortlaufend von Oszillationen geprägt ist, verringern sich diese mit der Reduzierung der Zeitschrittweite innerhalb der Simulation A (siehe Abbildung 8.30). Weicht der Verlauf der Verschiebung u_z^A in Richtung des Siloschafts im Bereich $0,5 \text{ s} \leq t \leq 0,8 \text{ s}$ noch von dem Verlauf einer monotonen Funktion ab, nimmt der Wert der radialen Verschiebung u_r^A stetig zu.

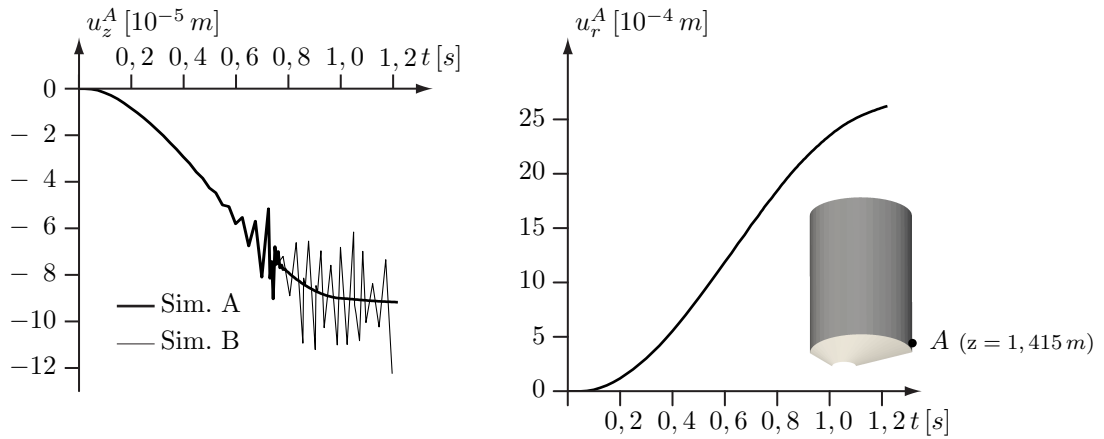


Abbildung 8.30: Verschiebungsverläufe

Die Verschiebung u_z^A der Simulation B bedingt signifikante Änderungen in der Fließrichtung entlang der Siloschale. Sie ist im Übergangsbereich zwischen zylindrischem Schaft und Auslaufrichter für zwei aufeinander folgende Zeitschritte in Abbildung 8.31 dargestellt. Weist die Fließrichtung zum Zeitpunkt $t = 0,83125 \text{ s}$ im zylindrischen Schaft eine deutlich sichtbare horizontale Komponente auf, ist die Strömung im darauf folgenden Zeitschritt vorrangig erst im Bereich des Auslaufrichters in Richtung der Auslauföffnung umgelenkt.

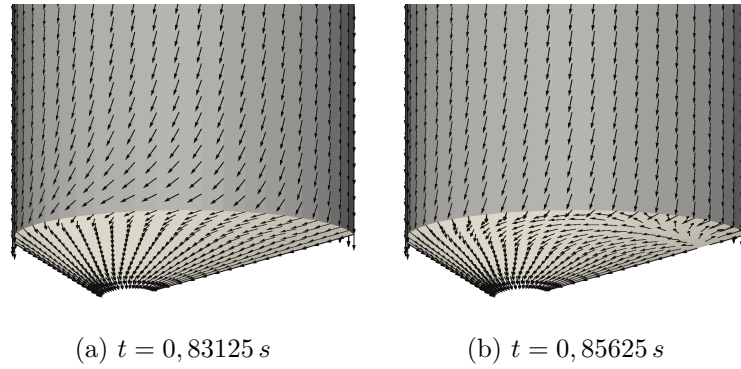


Abbildung 8.31: Fließrichtung zu diskreten Zeitpunkten

Die veränderte Fließrichtung zeigt sich auch im jeweils dazugehörigen Geschwindigkeits- und Druckfeld. Die Feldgrößen sind in Abbildung 8.32 mit Vektoren und Farbverläufen dargestellt. Während der Verlauf des Geschwindigkeitsfelds im Bereich der Auslauföffnung in der Zeit nahezu erhalten ist, ist die veränderte Fließrichtung entlang der Siloschale zum Zeitpunkt $t = 0,85625 \text{ s}$ mit einem Wirbel verbunden.

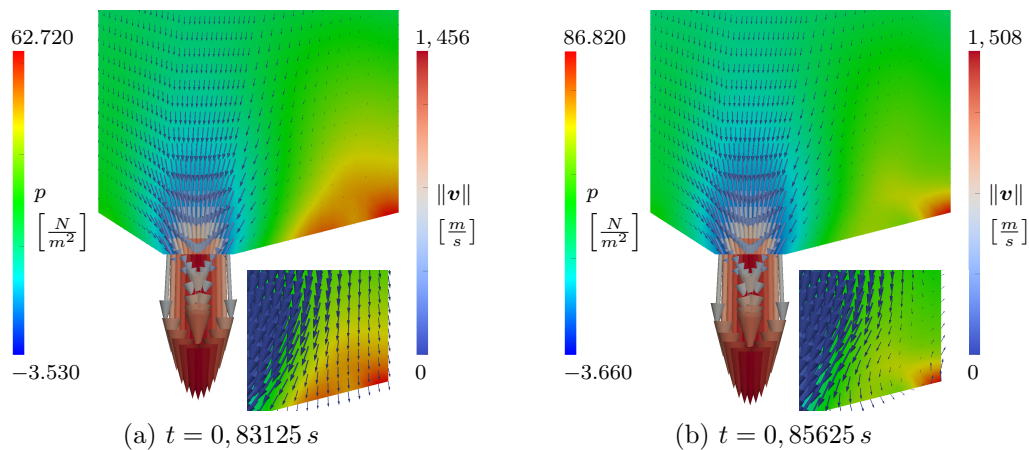


Abbildung 8.32: Druckverlauf und Geschwindigkeitsvektoren in der Symmetrieebene

Der Wirbel bildet sich im Bereich des Übergangs zwischen zylindrischem Schaft und Auslaufrichter aus und kann mit einem weiteren Strömungszustand physikalisch interpretiert werden. Dieser ist mit einer verlagerten Grenzschicht charakterisiert, innerhalb der das Schüttgut während der Entleerung umgewälzt wird. Dass das Geschwindigkeitsfeld zum Zeitpunkt $t = 0,85625 \text{ s}$ physikalisch interpretiert werden kann, zeigen auch die Hauptspannungsvektoren, die in der Symmetrieebene des Silos liegen (siehe Abbildung 8.33). Auch die Richtungen der Hauptspannungsvektoren sind hauptsächlich im Übergangsbereich zwischen zylindrischem Schaft und Auslaufrichter voneinander verschieden. Die Ausbildung eines Druckgewölbes ist in beiden Fällen ersichtlich.

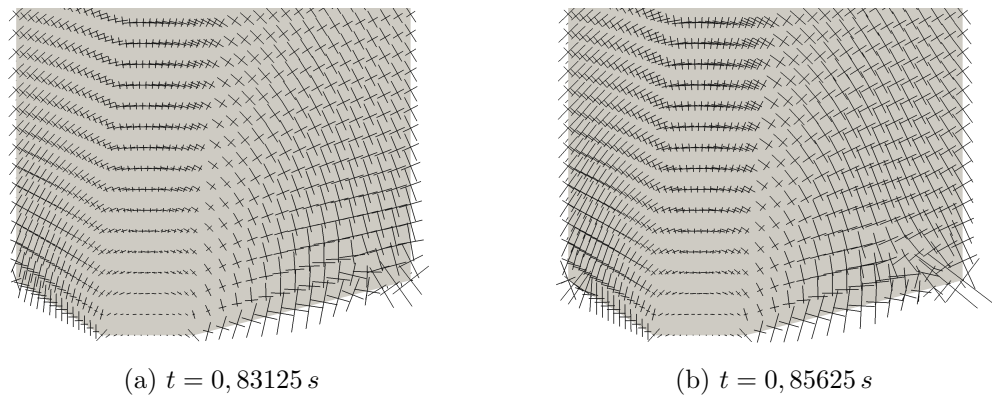


Abbildung 8.33: Hauptspannungsvektoren in der Symmetrieebene

Das zur in Abbildung 8.28 dargestellten Beanspruchung und Verformung der Siloschale gehörige Geschwindigkeits- und Druckfeld der Simulation A ist in Abbildung 8.34 gezeigt. Mit dem Verlauf des Geschwindigkeitsvektors ist die Beanspruchung und die Verformung der Siloschale bei laminarer Strömung numerisch analysiert.

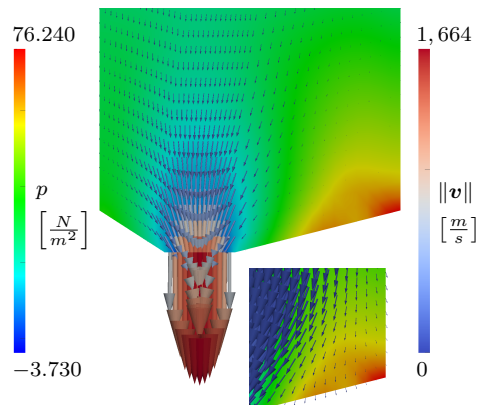


Abbildung 8.34: Druckverlauf und Geschwindigkeitsvektoren in der Symmetrieebene

9 Zusammenfassung und Ausblick

Es sind ein Modell und eine Methode für die numerische Analyse von selbstinduzierten Entleerungen dünnwandiger Silos vorgestellt. Mit den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik ist die stählerne Schale eines Silos als Struktur mit elastisch-viskoplastischem Materialverhalten und großen Rotationen beschrieben. Das Schüttgut ist als kompressibles viskoplastisches Fluid mit den Navier-Stokes-Gleichungen modelliert. Die Bewegung der freien Oberfläche des Schüttgutes ist mit der Level-Set-Gleichung implizit formuliert. Mit Berücksichtigung der Wandreibung ist ein Gesamtmodell entwickelt, mit dem der Einfluss der Wechselwirkung zwischen Schale und Schüttgut auf deren Bewegungen untersucht werden kann. Für Näherungslösungen sind die Modellgleichungen mit Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierungen in globalen Formen beschrieben. Mit der *FFEM* ist eine Methodik vorgestellt, mit der Bewegungen freier Oberflächen von Ein-Fluid-Strömungen berechnet werden können. Es sind Spannungszustände und Bewegungen von Silos während selbstinduzierter Entleerungen numerisch analysiert und die Einflüsse der Wandreibung und Wechselwirkung zwischen Schüttgut und Schale auf die Absenkung der freien Oberfläche und den Strömungszustand im Schüttgut dargestellt.

Die Modellierung des Schüttgutes kann verbessert werden, wenn dessen mechanisches Verhalten im Zustand der Ruhe mit einem Strukturmodell abgebildet und der Phasenübergang zwischen Struktur und Fluid formuliert wird (vergleiche LEPPERT [42]). Damit kann ein Modell entwickelt werden, mit dem sowohl der feste als auch der flüssige Zustand eines materiellen Körpers beschrieben wird. Mit den Prozessen des Verflüssigens und Erstarrens, mit denen das Abgleiten und Wiederanlagern von Schüttgütern in Silos abgebildet werden kann, sind Bewegungen von materiellen Punkten über große Distanzen zu beschreiben. Dies erfordert im Allgemeinen eine *ALE*-Formulierung der Modellgleichungen. Mit der *ALE*-Formulierung sind die Bahnen, auf denen sich elastische Strukturen bewegen, mit der Lösung der Evolutionsgleichung

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{,t} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{F} = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (9.1)$$

für den Deformationsgradienten [7] verfolgt, die die Entwicklung eines geeigneten numerischen Verfahrens für deren Näherungslösung motiviert. Sind die Modellgleichungen der Struktur in *ALE*-Formulierung beschrieben, ist deren Bewegung von einem unabhängigen Beobachter verfolgt. Damit kann die Konnektivität zwischen den Elementen des Schüttgutes und der Schale eines Silos auch während dessen Entleerung aufrecht erhalten werden. Dies motiviert die Entwicklung einer Methodik für flächigen Kontakt in Raum und Zeit, bei der mit diskontinuierlich verlaufenden Anreicherungen der Übergang zwischen Haften und Klaffen im Raum der Lösungen abgebildet werden kann.

Anhang

A Auswertung von Arbeitsgleichungen

A.1 Transformationsmatrizen partieller Ableitungen

Die Transformation der zweiten Ableitungen nach den lokalen Elementkoordinaten auf die Ableitungen der globalen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_1^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_2^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_3^2} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \\ \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1^2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_1^2} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_2^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_2^2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_2^2} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_3^2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_3^2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_3^2} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_2 \partial \xi_3} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{A.1})$$

ist mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)^2 & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)^2 & \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}\right)^2 & 2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right)^2 & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)^2 & \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}\right)^2 & 2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \\ \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}\right)^2 & \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}\right)^2 & \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\right)^2 & 2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} & 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} & 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} & \mathbf{J}_{44}^{-1} & \mathbf{J}_{45}^{-1} & \mathbf{J}_{46}^{-1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} & \mathbf{J}_{54}^{-1} & \mathbf{J}_{55}^{-1} & \mathbf{J}_{56}^{-1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \mathbf{J}_{64}^{-1} & \mathbf{J}_{65}^{-1} & \mathbf{J}_{66}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{44}^{-1} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \mathbf{J}_{45}^{-1} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} & \mathbf{J}_{46}^{-1} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \\ \mathbf{J}_{54}^{-1} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \mathbf{J}_{55}^{-1} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \mathbf{J}_{56}^{-1} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \\ \mathbf{J}_{64}^{-1} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \mathbf{J}_{65}^{-1} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \mathbf{J}_{66}^{-1} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

in Voigtscher Notation mit der Krümmung der lokalen Achsen und den ersten Ableitungen nach den globalen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial N}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

beschrieben.

A.2 Integrationsformeln

A.2.1 Tetraeder

Polynom- ordnung m	Integrations- punkt n	Baryzentrische Koordinaten λ_i				Wichtung w	Referenz
1	1	1/4	1/4	1/4	1/4	1/3!	STROUD [58]
2	1	α	α	α	β	a	STROUD [58]
	2	α	α	β	α	a	
	3	α	β	α	a	a	
	4	β	α	α	α	a	
α = 0,138196601125011 β = 0,585410196624967 a = 0,041666666666667							
3	1	α	α	α	0,0	a	STROUD [58]
	2	α	α	0,0	α	a	
	3	α	0,0	α	a	a	
	4	0,0	α	α	α	a	
	5	0,0	0,0	0,0	1,0	b	
	6	0,0	0,0	1,0	0,0	b	
	7	0,0	1,0	0,0	0,0	b	
	8	1,0	0,0	0,0	0,0	b	
α = 0,333333333333333 a = 0,037500000000000 b = 0,004166666666667							

Tabelle A.1: Integrationspunkte im Tetraeder für $m = 1, 2, 3$

Polynom- ordnung m	Integrations- punkt n	Baryzentrische Koordinaten λ_i				Wichtung w	Referenz
4	1	α	α	α	β	a	KEAST [37]
	2	α	α	β	α	a	
	3	α	β	α	a	a	
	4	β	α	α	α	a	
	5	γ	γ	γ	δ	b	
	6	γ	γ	δ	γ	b	
	7	γ	δ	γ	γ	b	
	8	δ	γ	γ	γ	b	
	9	0,5	0,5	0,0	0,0	c	
	10	0,5	0,0	0,5	0,0	c	
	11	0,5	0,0	0,0	0,5	c	
	12	0,0	0,5	0,5	0,0	c	
	13	0,0	0,5	0,0	0,5	c	
	14	0,0	0,0	0,5	0,5	c	
α = 0,100526765225205 a = 0,014764970790497							
β = 0,698419704324387 b = 0,022139791114265							
γ = 0,314372873493192 c = 0,003174603174603							
δ = 0,056881379520423							

Tabelle A.2: Integrationspunkte im Tetraeder für $m = 4$

Polynom- ordnung m	Integrations- punkt n	Baryzentrische Koordinaten λ_i				Wichtung w	Referenz
5	1	α	α	α	β	a	MÖLLER [29]
	2	α	α	β	α	a	
	3	α	β	α	a	a	
	4	β	α	α	α	a	
	5	γ	γ	γ	δ	b	
	6	γ	γ	δ	γ	b	
	7	γ	δ	γ	γ	b	
	8	δ	γ	γ	γ	b	
	9	ψ	ψ	ϵ	ϵ	c	
	10	ψ	ϵ	ψ	ϵ	c	
	11	ψ	ϵ	ϵ	ψ	c	
	12	ϵ	ψ	ψ	ϵ	c	
	13	ϵ	ψ	ϵ	ψ	c	
	14	ϵ	ϵ	ψ	ψ	c	

α = 0,092735250310891

β = 0,721794249067327

γ = 0,310885919263301

δ = 0,067342242210097

ψ = 0,454496295874350

ϵ = 0,045503704125650

a = 0,073493043116362/3!

b = 0,112687925718015/3!

c = 0,042546020777082/3!

Tabelle A.3: Integrationspunkte im Tetraeder für $m = 5$

Polynom- ordnung m	Integrations- punkt n	Baryzentrische Koordinaten λ_i				Wichtung w	Referenz
6	1	α	α	α	β	a	KEAST [37]
	2	α	α	β	α	a	
	3	α	β	α	a	a	
	4	β	α	α	α	a	
	5	γ	γ	γ	δ	b	
	6	γ	γ	δ	γ	b	
	7	γ	δ	γ	γ	b	
	8	δ	γ	γ	γ	b	
	9	ϕ	ϕ	ϕ	χ	c	
	10	ϕ	ϕ	χ	ϕ	c	
	11	ϕ	χ	ϕ	ϕ	c	
	12	χ	ϕ	ϕ	ϕ	c	
	13	ψ	φ	ϵ	ϵ	d	
	14	ψ	ϵ	φ	ϵ	d	
	15	ψ	ϵ	ϵ	φ	d	
	16	φ	ψ	ϵ	ϵ	d	
	17	φ	ϵ	ψ	ϵ	d	
	18	φ	ϵ	ϵ	ψ	d	
	19	ϵ	ψ	φ	ϵ	d	
	20	ϵ	ψ	ϵ	φ	d	
	21	ϵ	φ	ψ	ϵ	d	
	22	ϵ	φ	ϵ	ψ	d	
	23	ϵ	ϵ	ψ	φ	d	
	24	ϵ	ϵ	φ	ψ	d	

α = 0,214602871259152

β = 0,356191386222544

γ = 0,040673958534611

δ = 0,877978124396167

ϕ = 0,322337890142276

χ = 0,032986329573172

ψ = 0,603005664791648

ϵ = 0,063661001875018

φ = 0,269672331458316

a = 0,039922750258167/3!

b = 0,010077211055320/3!

c = 0,055357181543655/3!

d = 0,048214285714286/3!

Tabelle A.4: Integrationspunkte im Tetraeder für $m = 6$

Polynom- ordnung m	Integrations- punkt n	Baryzentrische Koordinaten λ_i	Wichtung w	Referenz
7	1	1/4 1/4 1/4 1/4	$\frac{-4^7}{2^6 7! 3!}$	[29] [15]
	2-6	3/6 1/6 1/6 1/6	$\frac{6^7}{2^6 8! 2!}$	
	7-11	5/8 1/8 1/8 1/8	$\frac{-8^7}{2^6 9!}$	
	12-21	3/8 3/8 1/8 1/8	$\frac{-8^7}{2^6 9!}$	
	22-26	7/10 1/10 1/10 1/10	$\frac{10^7}{2^6 10!}$	
	27-46	5/10 3/10 1/10 1/10	$\frac{10^7}{2^6 10!}$	
	47-56	3/10 3/10 3/10 1/10	$\frac{10^7}{2^6 10!}$	

Tabelle A.5: Integrationspunkte im Tetraeder für $m = 7$

A.2.2 Pentatop

Polynom- ordnung m	Integrations- punkt n	Lokale Elementkoordinaten				Wichtung	Referenz
		ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	w	
1	1	1/5	1/5	1/5	1/5	1/4!	STROUD [58]
2	1	α	α	α	α	a	STROUD [58]
	2	α	α	α	β	a	
	3	α	α	β	a	a	
	4	α	β	α	α	a	
	5	β	a	α	α	a	
$\alpha = 0,118350341907227$ $\beta = 0,526598632371092$ $a = 0,0083333333333333$							
3	1	α	α	α	α	a	DONCKER [18]
	2	β	β	β	β	b	
	3	β	β	β	γ	b	
	4	β	β	γ	β	b	
	5	β	γ	β	β	b	
	6	γ	β	β	β	b	
$\alpha = 0,2000000000000000$ $\beta = 0,142857142857143$ $\gamma = 0,428571428571429$ $a = -0,043402777777778$ $b = 0,017013888888889$							

Tabelle A.6: Integrationspunkte im Pentatop für $m = 1, 2, 3$

Polynom- ordnung m	Integrations- punkt n	Lokale Elementkoordinaten				Wichtung w	Referenz
		ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4		
5	1	α	α	α	α	a	DONCKER [18]
	2	α	α	α	γ	a	
	3	α	α	γ	α	a	
	4	α	γ	α	α	a	
	5	γ	α	α	α	a	
	6	α	α	α	β	a	
	7	α	α	β	α	a	
	8	α	β	α	α	a	
	9	β	α	α	α	a	
	10	α	α	β	β	a	
	11	β	β	α	α	a	
	12	β	α	β	α	a	
	13	α	β	α	β	a	
	14	β	α	α	β	a	
	15	α	β	β	α	a	
	16	δ	δ	δ	δ	b	
	17	δ	δ	δ	ϵ	b	
	18	δ	δ	ϵ	δ	b	
	19	δ	ϵ	δ	δ	b	
	20	ϵ	δ	δ	δ	b	
	21	ζ	ζ	ζ	ζ	c	
α = 0,1111111111111111 ζ = 0,2000000000000000							
β = 0,3333333333333333 a = 0,010170200892857							
γ = 0,5555555555555556 b = $-0,026052517361111$							
δ = 0,142857142857143 c = 0,019376240079365							
ϵ = 0,428571428571429							

Tabelle A.7: Integrationspunkte im Pentatop für $m = 5$

Polynom- ordnung m	Integrations- punkt n	Baryzentrische Koordinaten λ_i					Wichtung w	Referenz
7	1	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	$\frac{-5^7}{2^6 8! 3!}$	[29] [15]
	2-6	1/7	1/7	1/7	1/7	3/7	$\frac{7^7}{2^6 9! 2!}$	
	7-11	5/9	1/9	1/9	1/9	1/9	$\frac{-9^7}{2^6 10!}$	
	12-21	3/9	3/9	1/9	1/9	1/9	$\frac{-9^7}{2^6 10!}$	
	22-26	7/11	1/11	1/11	1/11	1/11	$\frac{11^7}{2^6 11!}$	
	27-46	5/11	3/11	1/11	1/11	1/11	$\frac{11^7}{2^6 11!}$	
	47-56	3/11	3/11	3/11	1/11	1/11	$\frac{11^7}{2^6 11!}$	

Tabelle A.8: Integrationspunkte im Pentatop für $m = 7$

Literaturverzeichnis

- [1] D.N. Arnould; F. Brezzi; M. Fortin: A stable finite element for the stokes equations, in: *Calcolo*, 21/4 (1984), S. 337 - 344.
- [2] R.F. Ausas; G.C. Buscaglia: A pde-based velocity extrapolation method for the transport of the level set function in two phase liquid-gas flows, in: *Serie Mecanica Computacional*, XXIX (2010), S. 3189 - 3206.
- [3] H. Balke: *Einführung in die Technische Mechanik - Festigkeitslehre*, 2008.
- [4] K.J. Bathe: *Finite-Elemente-Methoden*, 2. Auflage, 2002.
- [5] M. Behr; T. E. Tezduyar: Finite element solution strategies for large-scale flow simulations, in: *Comput. Method Appl. M.*, 112 (1994), S. 3 - 24.
- [6] T. Belytschko; W.K. Liu; B. Moran: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Chichester 2000.
- [7] J. Bonet; R. D. Wood: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge 1997.
- [8] M. Bischoff: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*, Dissertation, Universität Stuttgart 1999.
- [9] U. Brink; E. Stein: On some mixed finite element methodes for incompressible and nearly incompressible finite elasticity, in: *Comput. Mech.*, 19 (1996), S. 105 - 119.
- [10] I.N. Bronstein; K.A. Semendjajew; G. Musiol; H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*, 6. Auflage, Frankfurt am Main 2005.
- [11] J.L. Chaboche; G. Rousselier: On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part I: Rules Developed With Internal Variable Concept, in: *J. Pressure Vessel Technol.*, 105(2) (1983), S. 153 - 153.
- [12] J.W. Carson; T. Holmes: Silo Failures: Why Do They Happen?, in: *TASK Quarterly*, 7/4 - Recent Investigations of Silo Problems (2003), S. 499 - 512.
- [13] K.W. Cheng; T.P. Fries: Higher-order XFEM for curved strong and weak discontinuities, in: *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 82 (2010), S. 564 - 590.

- [14] J. Chung; G.M. Hulbert: A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method, in: J. Appl. Mech. 60 (1993), S. 371 - 375.
- [15] R. Cools; A. Genz: An adaptive numerical cubature algorithm for simplices, unpublished, 1997.
- [16] M. Crouzeix; P. A. Raviart: Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equation, in: RAIRO, Sdrie Analyse Numdrique, I, 33 (1973).
- [17] DIN Deutsches Institut für Normung e.V. (Hrsg.): Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 4: Einwirkungen auf Silos und Flüssigkeitsbehälter; Deutsche Fassung EN 1991-4 : 2006, Berlin 2006.
- [18] E. de Doncker: New Euler-Maclaurin expansions and their application to quadrature over the s-dimensional simplex, in: Math. Comp., 33 (1979), S. 1003 - 1018.
- [19] J. Donea; A. Huerta: Finite Element Methods for Flow Problems, 2003.
- [20] M. Delfour; W. Hager: Discontinuous Galerkin Methods for Ordinary Differential Equations, in: Math. Comput., 36/154 (1981), S. 455 - 473.
- [21] W.G. Dettmer: Finite element modelling of fluid flow with moving free surface and interfaces including fluid-solid interaction, Dissertation, University of Wales Swansea 2004.
- [22] H. Eschenauer; W. Schnell: Elastizitätstheorie, 3. Auflage, 1993.
- [23] J.D. Eshelby: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, in: Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 241/1226 (1957), S. 376 - 396.
- [24] U. Ghia; K.N. Ghia; C.T. Shin: High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, in: J. Comput. Phys., 48 (1982), S. 387 - 411.
- [25] T.P. Fries; T. Belytschko: The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications, in: Int. J. Numer. Meth. Engng, 00 (2000), S. 1 - 53.
- [26] T.P. Fries: A corrected XFEM approximation without problems in blending elements, in: Int. J. Numer. Meth. Engng, 75 (2008), S. 503 - 532.
- [27] T.P. Fries; A. Zilian: On time integration in the XFEM, in: Int. J. Numer. Meth. Engng, 79 (2009), S. 69 - 93.

- [28] B.A. Grohmann: Stabilized Space-Time Finite Elements for Transonic Aeroelasticity, Dissertation, Universität Stuttgart 2001.
- [29] A. Grundmann; H. M. Möller: Invariant integration formulas for the n-simplex by combinatorial methods, in: SIAM J. Numer. Anal., 15 (1978), S. 282 - 290.
- [30] R. Hill: The Mathematical Theory of Plasticity, 1950.
- [31] C. A. R. Hoare: FIND (Algorithm 65). in: Communications of the ACM, 1961, S. 321 - 322.
- [32] J. Hron; S. Turek: A monolithic fem solver for an ale formulation of fluid-structure interaction with configuration for numerical benchmarking, in: Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics, 2006.
- [33] T. Hughes; G. Hulbert: Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates, in: Comput. Method. Appl. M., 66/3 (1988), S. 339 - 363.
- [34] B. Hübner: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen, Dissertation, TU Braunschweig 2005.
- [35] K. E. Jansen; C. H. Whiting; G. M. Hulbert: A generalized- α method for integrating the filtered Navier-Stokes equations with a stabilized finite element method, in: Comput. Method. Appl. M., 190 (2000), S. 305 - 319.
- [36] H.A. Janssen: Versuche über Getreidedruck in Silozellen, in: Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 39 (1985), S. 1045 - 1049.
- [37] P. Keast: Moderate-degree tetrahedral quadrature formulas, in: Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 55 (1986), S. 339 - 348.
- [38] E. Klingbeil: Tensorrechnung für Ingenieure, 2.Auflage, 1989.
- [39] J. Knippers; R. Harbord: A mixed hybrid FE formulation for solution of elastoviscoplastic problems - Part II: dynamic loading conditions and bending problems, in: Comput. Mech., 13 (1994), S. 231 - 240.
- [40] K. J. Kim; M. S. Song: Invariant cubature formulas over a unit cube, in: Comm. Korean Math. Soc. 13 (1998), S. 913 - 931.
- [41] A. Kölke: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen, Dissertation, TU Braunschweig 2005.
- [42] C. Leppert: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos, Dissertation, TU Braunschweig 2007.
- [43] J. Lubliner: Plasticity Theory, New York 1990.

- [44] K. Magnus; H.H. Müller-Slany: Grundlagen der Technischen Mechanik, 7. Auflage, 2005.
- [45] U.M. Mayer; A. Gerstenberger; W.A. Wall: Interface handling for three-dimensional higher-order XFEM-computations in fluid-structure interaction, in: Int. J. Numer. Meth. Eng., 79 (2009), S. 846 - 869.
- [46] E A de Souza. Neto; D. Perić; D.R.J. Owen: Computational Methods for Plasticity - Theory and Applications, 2008.
- [47] N. Moës; M. Cloires; P. Cartraud; J.F. Remacle: A computational approach to handle complex microstructure geometries, in: Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 192 (2003), S. 3163 - 3177.
- [48] C. Petersen: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen, 2. Auflage, 1982.
- [49] C. Petersen: Dynamik der Baukonstruktionen, 1996.
- [50] D. Perić; S. Slijepčević: Computational modelling of viscoplastic fluids based on a stabilised finite element method, in: Eng. Computation, 18/3-4 (2001), S. 577 - 591.
- [51] T. H. H. Pian; K. Sumihara: Rational approach for assumed stress finite elements, in: Int. J. Numer. Meth. Eng., 1985, S. 1685 - 1695.
- [52] C. Ruckenbrod; F. H. Schlüter: Silolasten nach der neuen DIN 1055-6, in: Beton- und Stahlbetonbau 101, 3 (2006), S. 138 - 151.
- [53] A.J. Sadowski; J.M. Rotter: Buckling in Eccentrically Discharged Silos and the Assumed Pressure Distribution, in: J. Eng. Mech., 139/7 (2013), S. 858 - 867.
- [54] F. Shakib; T.J.R. Hughes: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: IX. Fourier analysis of space-time Galerkin/least-squares algorithms, in: Comput. Method. Appl. M., 87 (1991), S. 35 - 58.
- [55] D. Schulze: Pulver und Schüttgüter - Fließeigenschaften und Handhabung, 2006.
- [56] J. A. Sethian: Level Set Methods and Fast Marching Methods, Second Edition, 1999.
- [57] J. A. Sethian; A. Vladimirsky: Fast methods for the Eikonal and related Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes, in: Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 97 (2000), S. 5699 - 5703.
- [58] A. H. Stroud: Approximate calculation of multiple integrals, 1971.

- [59] Y. Sudhakar; W. A. Wall: Quadratur schemes for arbitrary convex/concave volumes and integration of weak form in enriched partition of unity methods, in: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 258 (2013) S. 39 - 54.
- [60] T. E. Tezduyar; S. Mittal; S.E.Ray; R.Shih: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, in: *Comput. Method. Appl. M.*, 95 (1992), S. 221 - 242.
- [61] T. E. Tezduyar; M. Senga: Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulations of compressible flows, in: *Comput. Method. Appl. M.*, 195 (2006), S. 1621 - 1632.
- [62] D.F. McTigue: A Nonlinear Constitutive Model for Granular Materials: Application to Gravity Flow, in: *J. Appl. Mech.*, 49 (1982), S. 291 - 296.
- [63] S. Turek; M. Schäfer: Benchmark computation of laminar flow around a cylinder, in: *Flow Simulation with High-Performance Computers II, Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 52 (1996), S. 547 - 566.
- [64] E. Truckenbrodt: *Fluidmechanik. Band I: Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*, 1996.
- [65] E. Truckenbrodt: *Fluidmechanik. Band 2: Elementare Strömungsvorgänge dichte- und druckveränderlicher Fluide sowie Potential- und Grenzschichtströmungen*, 1999.
- [66] E. Walhorn: Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen, Dissertation, TU Braunschweig 2002.
- [67] W.A. Wall; M. Gee; E. Ramm: The challenge of a three-dimensional shell formulation - the conditioning problem, in: *Computational Methods for Shell and Spatial Structures*, 2000.
- [68] G.X. Wu; R. Eatock Taylor; D.M. Greaves: The effect of viscosity on the transient free-surface waves in a two-dimensional tank, in: *J. Eng. Math.*, (2001), S. 77 - 90.
- [69] A. Zilian; T.P. Fries: A localized mixed-hybrid method for imposing interfacial constraints in the extended finite element method (XFEM), in: *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 79 (2009), S. 733 - 752.
- [70] T. Zangmeister; H. Andrä; R. Müller: Comparison of XFEM and Voxelbased FEM for the Approximation of Discontinuous Stress and Strain at Material Interfaces, in: *Technische Mechanik*, 33/2 (2013), S. 131 - 141.
- [71] O.C. Zienkiewicz; R.L. Taylor; J.Z. Zhu: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Sixth edition, 2005.

- [72] O.C. Zienkiewicz; R.L. Taylor; P. Nithiarasu: The Finite Element Method for Fluid Dynamics, Sixth edition, 2005.

Quellen

- [73] <http://www.agremo.pl/oferta/2-silosy.html>
[74] <https://jenike.com/your-need/siloequipment-failure>
[75] <http://eigen.tuxfamily.org>
[76] http://www5.in.tum.de/lehre/diplomarbeiten/fsi_comsol/Benchmark.pdf

Berichte aus dem Institut für Statik ab 2003

- Nr. 2003-96 B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen
- Nr. 2003-97 J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme
- Nr. 2003-98 O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen
- Nr. 2005-99 A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen
- Nr. 2006-100 D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996-2006
- Nr. 2006-101 A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen
- Nr. 2006-102 M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden
- Nr. 2006-103 L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt
- Nr. 2006-104 T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten
- Nr. 2007-105 C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos
- Nr. 2007-106 V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2007-107 J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlaster von Schalentragsystemen
- Nr. 2009-108 M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck
- Nr. 2010-109 P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien
- Nr. 2010-110 J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading
- Nr. 2010-111 K. SCHUSTER: Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren
- Nr. 2011-112 S. BENTE: Interaction of Degradation, Deformation and Transport Processes in Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2011-113 L. OSTERMANN: Hochtemperaturverhalten von Beton – Gekoppelte Mehrfeld-Modellierung und numerische Analyse

- Nr. 2012-114 B. BRODERSEN: Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten
- Nr. 2012-115 J. KINDLEIN: Gekoppelte Analyse von Reaktions- und Transportprozessen in Deponiestrukturen
- Nr. 2015-116 F. PASENOW: Modellierung oberflächengekoppelter Mehrfeldsysteme und numerische Analyse rutschender Bodenmaterialien
- Nr. 2015-117 M. SCHAUER: Ein effizienter gekoppelter FEM-SBFEM Ansatz zur Analyse von Boden-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich
- Nr. 2016-118 A. ALFARRA: Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbulenzmodellen

Sonderdrucke

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens
 Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998)
 Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky

Baustatik-Baupraxis 8
 Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig
 Herausgeber: D. Dinkler

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig
 Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland
 Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116
 E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <https://www.tu-braunschweig.de/statik>

ISBN 978-3-926031-20-4